Généralités sur les fonctions

(*quelques indications et corrigés*)

Indications

Exercice 2 (*question* 1.) Calculer les premières dérivées de la fonction. Émettre ensuite une conjecture à démontrer par récurrence.

Exercice 7

1. La fonction sh est dérivable en 0 ; dans la limite, le quotient est un taux d'accroissement en 0.
2. Il suffit de faire le calcul.
3. Cette question est difficile. On peut commencer par se débarrasser du cas $x = 0$. Ensuite, pour $x \neq 0$:
   - ⋆ calculer les premiers termes de la suite (u_0, u_1 voire u_2 en utilisant la question 2.) puis émettre une conjecture quant à la valeur de u_n ;
   - ⋆ démontrer la conjecture par récurrence ;
   - ⋆ pour calculer la limite, utiliser la question 1. en remarquant que $\dfrac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 11

- ⋆ Dériver la fonction f. Dans l'expression de f' apparaît celle de la fonction :

$$g : x \longmapsto a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$$

- ⋆ Étudier g et obtenir que g est positive sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⋆ En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
- ⋆ Il s'agit enfin de constater que l'inégalité à démontrer se réécrit $f(\alpha) \leqslant f(\beta)$ pour des valeurs de α et β judicieusement choisies.

Exercice 18

- ⋆ Raisonner par l'absurde. Quelle est la négation de : « $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$ ».
- ⋆ L'assertion $f(x) \neq x$ se réécrit $f(x) < x$ ou $f(x) > x$. Traiter alors deux cas.

Corrigés

Exercice 2 (*question* 1.)

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :
   - ⋆ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$;
   - ⋆ $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$;
   - ⋆ $f^{(3)}(x) = 2x^{-3}$;
   - ⋆ $f^{(4)}(x) = -6x^{-4}$;
   - ⋆ $f^{(5)}(x) = 24x^{-5}$.

   Notation : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

   $$n\,! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1 \qquad (\textit{factorielle de } n)$$

   Par convention, on pose $0\,! = 1$.

   Avec cette notation, on conjecture que :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{x^n},$$

   Nous allons le vérifier par récurrence.
   - ⋆ Pour $n = 1$, on a :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad (-1)^{1-1}\frac{(1-1)\,!}{x^1} = \frac{1}{x} = f'(x)$$

     donc l'égalité est vraie au rang $n = 1$.
   - ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que :

   $$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{x^n} = (-1)^{n-1}(n-1)\,!\,x^{-n}$$

     Par définition de la dérivée $(n+1)^{\text{e}}$, on a :

   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n+1)}(x) = \left(f^{(n)}\right)'(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)\,!\,(-n)x^{-n-1} \\ &= (-1) \times (-1)^{n-1} \times (n-1)\,! \times nx^{-(n+1)} \\ &= (-1)^n n\,!\,x^{-(n+1)}\end{aligned}$$

     donc l'égalité est vraie au rang $n+1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)\,!}{x^n} \qquad (\text{et } f^{(0)} = \ln)}$$

Exercice 7

1. La fonction sh est dérivable sur $\mathbb{R}$; elle est donc en particulier dérivable en 0. Par définition de la dérivabilité, on a :

$$\operatorname{sh}'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(0)}{x - 0}$$

Or $\operatorname{sh}(0) = 0$ et $\operatorname{sh}'(0) = \operatorname{ch}(0) = 1$ donc :

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(x)}{x} = 1}$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Alors $\operatorname{sh}(x) \neq 0$ et :

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}(x)} = \frac{\frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{2}}{2\times\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}} &= \frac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-2x}}{2(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})}\\ &= \frac{(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})}{2(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad \operatorname{ch}(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}(x)}}$$

3. Si x vaut 0, alors chaque terme dans le produit est égal à 1 (puisque $\operatorname{ch}(0) = 1$). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $u_n = 1$.
Supposons maintenant que $x \in \mathbb{R}^*$ et commençons par calculer les premiers termes de la suite. On a $u_0 = \operatorname{ch}(x)$ puis (en utilisant la question 2. avec les nombres non nuls x et $x/2$) :

$$u_1 = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}(x)}\times\frac{\operatorname{sh}(x)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2}\right)}$$

On conjecture alors que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+1}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Démontrons ce résultat à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

- ⋆ On sait que :

$$u_0 = \operatorname{ch}(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}(x)}$$

d'après la question 2. L'égalité est donc vraie au rang $n = 0$.

- ⋆ Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que :

$$u_n = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+1}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$$

Montrons que :

$$u_{n+1} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+2}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

On a (en mettant le dernier terme de côté dans le produit définissant u_{n+1}) :

$$u_{n+1} = \underbrace{\left(\prod_{k=0}^{n}\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right)\right)}_{=u_n}\times\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Par hypothèse de récurrence, on a :

$$u_{n+1} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+1}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}\times\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)$$

Comme $\dfrac{x}{2^{n+1}} \neq 0$ (puisque $x \neq 0$), la question 2. nous donne :

$$\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right) = \frac{\operatorname{sh}\left(2\times\frac{x}{2^{n+1}}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

Ainsi :

$$u_{n+1} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+1}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}\times\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)} = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+2}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^{n+1}}\right)}$$

L'égalité est donc vérifiée au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence simple, on peut conclure que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2^{n+1}\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}}$$

Il s'agit maintenant de trouver la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$. Remarquons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x\times\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}}}$$

Or $\dfrac{x}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc, d'après la question 1., on a $\dfrac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\frac{x}{2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. On en déduit donc que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\operatorname{sh}(2x)}{2x}$. Finalement :

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge de limite 1 si } x=0, \text{ et de limite } \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2x} \text{ si } x \neq 0}$$

Exercice 11

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions qui le sont et :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f'(x) &= \frac{\frac{a}{1+ax}\ln(1+bx) - \frac{b}{1+bx}\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)^2} \\ &= \frac{a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)}{(1+ax)(1+bx)\ln(1+bx)^2} \end{aligned}$$

Considérons la fonction $g : x \longmapsto a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Celle-ci est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= a\left(b\ln(1+bx) + (1+bx)\times\frac{b}{1+bx}\right) - b\left(a\ln(1+ax) + (1+ax)\times\frac{a}{1+ax}\right) \\ &= ab\ln(1+bx) + ab - ab\ln(1+ax) - ab \\ &= ab\ln\left(\frac{1+bx}{1+ax}\right) \end{aligned}$$

Comme $0 < a \leqslant b$, on a $1+bx \geqslant 1+ax > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et donc $\dfrac{1+bx}{1+ax} \geqslant 1$ puis $g'(x) \geqslant 0$. On en déduit le tableau de variations de g, ainsi que son signe sur $\mathbb{R}_+^*$:

x	0	$+\infty$
g	0	↗
$g(x)$		$+$

Comme f' est du signe de g, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$
f		↗

On a $0 < a \leqslant b$ donc $\dfrac{1}{b} \leqslant \dfrac{1}{a}$. La croissance de f entraîne que :

$$f\left(\frac{1}{b}\right) \leqslant f\left(\frac{1}{a}\right) \qquad i.e. \qquad \frac{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)}{\ln(2)} \leqslant \frac{\ln(2)}{\ln\left(1+\frac{b}{a}\right)}$$

En multipliant des deux côtés par $\ln(2)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \geqslant 0$, on obtient bien :

$$\boxed{\ln\left(1+\frac{a}{b}\right)\ln\left(1+\frac{b}{a}\right) \leqslant 2}$$

Exercice 16

1. *Il s'agit ici de donner un contre-exemple.*
   Considérons les fonctions $f : x \longmapsto \mathrm{e}^x$ et $g : x \longmapsto -x$ sur $\mathbb{R}$ qui sont respectivement croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$. On pose $h = f+g$. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme de fonctions qui le sont) et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad h'(x) = \mathrm{e}^x - 1 \geqslant 0 \iff \mathrm{e}^x \geqslant 1 \iff x \geqslant 0$$

   par croissance stricte de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

   La fonction h n'est ni croissante sur $\mathbb{R}$, ni décroissante sur $\mathbb{R}$. Ainsi :

$$\boxed{\text{la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut être ni croissante, ni décroissante}}$$

2. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I. Il existe alors des nombres réels a, A, b et B tels que :

$$\forall x \in I, \qquad a \leqslant f(x) \leqslant A \qquad \text{et} \qquad b \leqslant g(x) \leqslant B$$

En sommant les inégalités, on obtient :

$$\forall x \in I, \qquad a + b \leqslant \underbrace{f(x) + g(x)}_{=(f+g)(x)} \leqslant A + B$$

La fonction $f + g$ est donc bornée sur I. Ainsi :

$$\boxed{\text{la somme de deux fonctions bornées est une fonction bornée}}$$

3. Soient f et g deux fonctions bornées sur un intervalle I. Il existe alors des nombres réels a, A, b et B tels que :

$$\forall x \in I, \qquad a \leqslant f(x) \leqslant A \qquad \text{et} \qquad b \leqslant g(x) \leqslant B$$

et, quitte à diminuer les valeurs de a et b, on peut supposer que $a, b \in \mathbb{R}_-$.
Soit $x \in I$. Les inégalités ci-dessus impliquent que :

$$0 \leqslant f(x) - a \leqslant A - a \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant g(x) - b \leqslant B - b$$

Les nombres mis en jeu étant positifs, on obtient en multipliant membre à membre :

$$0 \leqslant (f(x) - a)(g(x) - b) \leqslant (A - a)(B - b)$$

i.e. :

$$0 \leqslant f(x)g(x) - bf(x) - ag(x) + ab \leqslant (A - a)(B - b)$$

soit encore :

$$bf(x) + ag(x) - ab \leqslant f(x)g(x) \leqslant (A - a)(B - b) + bf(x) + ag(x) - ab$$

Or $a \leqslant f(x) \leqslant A$ et $b \leqslant 0$ donc $Ab \leqslant bf(x) \leqslant ab$. De même, $aB \leqslant ag(x) \leqslant ab$. On en déduit donc que :

$$Ab + aB - ab \leqslant \underbrace{f(x)g(x)}_{=(fg)(x)} \leqslant (A - a)(B - b) + ab$$

La fonction fg est donc bornée sur I. Ainsi :

$$\boxed{\text{le produit de deux fonctions bornées est une fonction bornée}}$$

Exercice 18 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq x$. Alors ou bien $f(x) < x$, ou bien $f(x) > x$. On traite les deux cas séparément.

- ⋆ **Premier cas :** $f(x) < x$
  La fonction f étant croissante sur $\mathbb{R}$, le fait que $f(x) < x$ implique que $f(f(x)) \leqslant f(x)$, c'est-à-dire $(f \circ f)(x) \leqslant f(x)$. Or $(f \circ f)(x) = x$ donc $x \leqslant f(x)$. Ceci est en contradiction avec le fait que $f(x) < x$.
- ⋆ Le deuxième cas se traite de manière analogue.

On peut donc conclure que :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x}$$