

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1 Calculs

Exercice 1 (propriétés algébriques de ln et exp) Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = \ln(\sqrt{e^3}) + \ln(\sqrt[4]{e}) + e^{-2\ln 2}$
2. $B = \exp\left(-\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{w}\right)}\right)^{\ln\left(\frac{1}{w^2}\right)} \quad (w > 0)$
3. $C = \exp\left[x + \ln\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)\right] \quad (x \in \mathbb{R})$
4. $D = \frac{1}{e} \times \exp\left((x+1)^2 - e^{2\ln(x)}\right) \quad (x > 0)$
5. Montrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto x \frac{e^{3\ln(2x) - \ln(x)} e^{x-3\ln(x)}}{e^{x-2}}$ est constante.

Exercice 2 (dérivées successives) Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes sur un domaine à déterminer :

1. $f : x \mapsto \ln(x)$
2. $g : x \mapsto \frac{1}{x^2 - 1}$
3. $h : x \mapsto x e^x$

Indication : pour la fonction g , on pourra commencer par justifier l'existence de deux nombres réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad g(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Exercice 3 (limites) Calculer les limites suivantes :

1. $\ell_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3 + x + \sqrt{x})$
2. $\ell_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^4 + 3x}$
3. $\ell_3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\ln(x) + x}$
4. $\ell_4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
5. $\ell_5 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x}$
6. $\ell_6 = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
7. $\ell_7 = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(x-1)}$
8. $\ell_8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2} - 1}$
9. $\ell_9 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(e^x)}{x^2 + 1}$
10. $\ell_{10} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$
11. $\ell_{11} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x)}$
12. $\ell_{12} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)^x$

Exercice 4 (dérivées) Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes et calculer la fonction dérivée :

1. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$
2. $g : x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x}}$
3. $h : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$
4. $k : x \mapsto \ln(e^x + 2e^{-x} - 3)$

Exercice 5 (fonctions hyperboliques et formules d'addition) Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a les identités suivantes :

1. $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{ch}(x)\operatorname{sh}(y)$;
2. $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch}(x)\operatorname{ch}(y) + \operatorname{sh}(x)\operatorname{sh}(y)$;
3. $\operatorname{th}(x+y) = \frac{\operatorname{th}(x) + \operatorname{th}(y)}{1 + \operatorname{th}(x)\operatorname{th}(y)}$.

Exercice 6 (une équation) Résoudre l'équation $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7 (fonctions hyperboliques) 1. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(x)}{x}$.

2. Montrer que pour tout nombre réel x non nul, on a $\operatorname{ch}(x) = \frac{\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{sh}(x)}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \prod_{k=0}^n \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^k}\right),$$

où $\prod_{k=0}^n a_k$ désigne le produit $a_0 \times a_1 \times \cdots \times a_n$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 8 Résoudre le système ci-dessous d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} \operatorname{ch}(x) + \operatorname{ch}(y) = \frac{35}{12} \\ \operatorname{sh}(x) + \operatorname{sh}(y) = \frac{25}{12} \end{cases}$$

Exercice 9 Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$:

1. $3\operatorname{ch}(x) + 2\operatorname{sh}(x) = 7$;
2. $\operatorname{ch}(x)^4 - \operatorname{sh}(x)^4 = 1$;
3. $\operatorname{ch}(x)^4 + \operatorname{ch}(x)^3 \operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) \operatorname{sh}(x)^3 - \operatorname{sh}(x)^4 = 0$.

2 Autour du tableau de variations

Exercice 10 (sens de variation) Étudier le sens de variation des fonctions suivantes sur l'intervalle indiqué (on dressera notamment le tableau de variations) :

1. $f : x \mapsto x \ln(x)$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$;
2. $g : x \mapsto \frac{x^4 - 1}{x^4 + 1}$ sur $I = \mathbb{R}$;
3. $h : x \mapsto -x^7 + x^4 + x^2 + 3$ sur $I =]-\infty, 0]$;
4. $k : x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x - 3}$ sur son domaine de définition.

Exercice 11 (inégalités) 1. Montrer que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \ln(1+x) \leq x$$

2. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}$$

Exercice 12 Trouver la plus grande valeur de $\sqrt[n]{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 13 (inégalité) Montrer que :

$$\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2} \leq \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Exercice 14 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x \ln(x) - \frac{x^2 - 1}{2}$$

1. Déterminer le signe, sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$, de $\frac{x \ln(x)}{x^2 - 1}$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, \quad \frac{x \ln(x)}{x^2 - 1} \leq \frac{1}{2}$$

Exercice 15 (inégalité) Montrer que :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad x^x (1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$$

Exercice 16 (inégalité) Soient a et b des nombres réels tels que $0 < a \leq b$. On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ pour tout $x > 0$. En étudiant la fonction f , montrer que :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq \ln(2)^2.$$

Exercice 17 (inégalité) 1. Montrer que :

$$\forall \alpha \in [0, 1], \quad \forall x \in]-1, +\infty[, \quad (1+x)^\alpha \leq 1 + \alpha x$$

2. En déduire que pour tout $\alpha \in [0, 1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\alpha}{k}\right) \geq (n+1)^\alpha,$$

où $\prod_{k=1}^n a_k$ désigne le produit $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$.

Exercice 18 Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction. On suppose que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) e^{f(x)} = x$$

Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 19 (inégalité) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+, \quad e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$$

Indication : on procèdera par récurrence.

Exercice 20 (une fonction) Soit la fonction $f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

1. Montrer que le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f est égal à $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.
Indication : distinguer les cas $x < 0$ et $x \geq 0$.
2. Étudier la parité de la fonction f .
3. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
4. Étudier les variations de f .
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en 0.
6. Tracer la courbe représentative de f .

3 Divers

Exercice 21 Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, f étant croissante sur $\mathbb{R}$ et g décroissante. Déterminer le sens de variation de $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 (parité) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I .

1. On suppose que f est paire. Que dire de f' ?
2. On suppose que f est impaire. Que dire de f' ?
3. On suppose que f est périodique. Que dire de f' ?

Exercice 23 1. Montrer que la somme d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante peut être ni croissante, ni décroissante.

2. Montrer que la somme de deux fonctions bornées est bornée.
3. Montrer que le produit de deux fonctions bornées est une fonction bornée.

Exercice 24 (fonction bornée ?) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la fonction :

$$f_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x^n}{1+x^2} \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f_n est bornée sur $\mathbb{R}$ si $n \in \{0, 1, 2\}$.
2. Montrer que la fonction f_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$ si $n \notin \{0, 1, 2\}$.

Exercice 25 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f \circ f \circ f)(x) = x$$

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x$$

Exercice 26 1. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow I$ une fonction strictement croissante sur I . On fixe un élément x de l'intervalle I . Montrer que les assertions (1) et (2) suivantes sont équivalentes :

- (1) $(f \circ f)(x) = x$;
- (2) $f(x) = x$.

2. Pour $a > 0$ fixé, déterminer le nombre de solutions de l'équation $e^{ae^{ax}} = x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.