Questions & réponses

Réponses

R998. Posé dans RMS 130 3.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction indéfiniment dérivable et n un entier naturel. Établir les deux identités.

$$(n+1)(f''f^{n+1})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(f^{n+1-k}\right)^{(n-k)} \left(f''f^{k}\right)^{(k)},$$

$$(f'f^{n})^{(n)} - f'(f^{n})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \left(f^{k}\right)^{(k)} \left(f''f^{n-k}\right)^{(n-k-1)}.$$

(Jean-Francois-Coulombel)

Réponse de Vincent Devinck

Les identités sont claires si $n = 0$. Dans la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Le point de départ de la preuve est le *lemme fondamental du calcul des variations* (lemme 4, partie III) : d'après ce lemme, pour montrer qu'une fonction continue ψ sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ est identiquement nulle, il suffit de montrer que pour toute fonction *régulière φ à support compact* (définition 1) sur I, on a :

$$\int_I \psi(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Nous appliquerons ce lemme à la fonction $g = A - B$ où A et B désignent les deux membres de chaque identité à démontrer.

Pour mener à bien les calculs, une description adaptée de l'expression des dérivées successives des puissances d'une fonction régulière f donnée, est nécessaire. Ceci fait l'objet de la première partie ci-dessous.
Dans la deuxième partie, deux résultats combinatoires sont détachés pour aérer les calculs qui suivent dans les parties IV et V. Dans celles-ci, on démontrera les identités proposées en considérant dans un premier temps des fonctions f ne s'annulant pas sur des intervalles ouverts non vides.
Le cas général est traité dans la partie VI.

I. Une expression polynomiale de $(f^d)^{(m)}$

Le symbole I désigne un intervalle réel ouvert et non vide et f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I. On notera souvent $D^d(\varphi)$ au lieu de $\varphi^{(d)}$ la dérivée d^{e} d'une fonction φ ; en particulier $D^0(\varphi) = \varphi$.
Il est clair que pour tout $(m, d) \in \mathbb{N}^2$, la dérivée d^{e} de f^m est une fonction polynomiale en les dérivées successives f, $f', \ldots, f^{(d)}$ de f, mais aussi en l'exposant m. Le résultat suivant précise cette observation.

Lemme 1. *Pour tout entier $d > 0$, il existe un polynôme réel $P_d(x_0, x_1, \ldots, x_d, X)$ de degré au plus $d-1$ en X, tel que toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et tout $m \in \mathbb{N}$ on a*

$$f^d D^d(f^m) = m f^m P_d(f, f', \ldots, f^{(d)}, m) \tag{1}$$

De plus le coefficient de X^{d-1} de P_d est x_1^d.

Démonstration. Posons $P_1(x_0, x_1, X) = x_1$ et, pour tout $d \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} P_{d+1}(x_0, x_1, \ldots, x_{d+1}, X) &= (X-d) x_1 P_d(x_0, x_1, \ldots, x_n, X) \\ &\qquad + x_0 \sum_{i=0}^{d} x_{i+1} \frac{\partial P_d}{\partial x_i}(x_0, x_1, \ldots, x_d, X) \end{aligned}$$

Nous allons vérifier que ces polynômes vérifient les propriétés requises en raisonnant par récurrence sur l'entier d. L'égalité (1) est clairement vérifiée si $d = 1$ et le coefficient du monôme X^0 du polynôme $P_1(f, f', X)$ est bien f'. Supposons maintenant que (1) soit vérifiée pour un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et fixons $m \in \mathbb{N}$. D'une part :

$$D(f^{d+1} D^d(f^m)) = (d+1) f' f^d D^d(f^m) + f^{d+1} D^{d+1}(f^m)$$

et d'autre part :

$$D(f^{d+1} D^d(f^m)) = D(f \times f^d D^d(f^m)) = f' f^d D^d(f^m) + f D(f^d D^d(f^m))$$

et donc, en isolant $f^{d+1} D^{d+1}(f^m)$:

$$f^{d+1} D^{d+1}(f^m) = f D(f^d D^d(f^m)) - d f' f^d D^d(f^m) \tag{2}$$

Par hypothèse de récurrence, on a (la dérivation se faisant par rapport à la variable x de la fonction f) :

$$\begin{aligned} D(f^d D^d(f^m)) &= m D\big(f^m P_d(f, f', \ldots, f^{(d)}, m)\big) \\ &= m^2 f' f^{m-1} P_d(f, f', \ldots, f^{(d)}, m) + m f^m D\big(P_d(f, f', \ldots, f^{(d)}, m)\big) \\ &= m^2 f' f^{m-1} P_d(f, f', \ldots, f^{(d)}, m) + m f^m \sum_{i=0}^{d} (f^{(i)})' \frac{\partial P_d}{\partial x_i}(f, f', \ldots, f^{(d)}, m) \end{aligned}$$

avec $(f^{(i)})' = f^{(i+1)}$ pour tout $i \in [\![0, d]\!]$. L'hypothèse de récurrence nous donne également :

$$d f' f^d D^d(f^m) = m d f' f^m P_d(f, f', \ldots, f^{(d)}, m)$$

En reportant dans (2), on obtient :

$$\begin{aligned} f^{d+1}D^{d+1}(f^m) &= mf^m\left\{(m-d)f'P_d(f,\dots,f^{(d)},m)+f\sum_{i=0}^{n} f^{(i+1)}\frac{\partial P_d}{\partial x_i}(f,\dots,f^{(d)},m)\right\}\\ &= mf^m P_{d+1}(f,\dots,f^{(d+1)},m)\end{aligned}$$

par définition du polynôme P_{d+1}. Par ailleurs, si le coefficient dominant de $P_d(f,f',\dots,f^{(d)},X)$ est x_1^d, alors celui de $P_{d+1}(f,f',\dots,f^{(d+1)},X)$ s'obtient en développant :

$$(X-d)f'P_d(f,f',\dots,f^{(d)},X)$$

Il est donc bien égal à x_1^{d+1}. □

Dans une deuxième partie, on met en avant deux quantités qui apparaîtront régulièrement dans les calculs.

II. Deux résultats combinatoires

Pour tout nombre réel x et pour tout entier naturel i non nul, on pose :

$$(x)_i = x(x-1)\dots(x-i+1) \tag{3}$$

et, par convention, on pose $(x)_0 = 1$. Le résultat élémentaire suivant nous permettra de démontrer le lemme 3 qui jouera un rôle crucial dans les parties IV et V.

Lemme 2. *Soit $(m,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$. Alors on a les identités suivantes :*

$$\forall i\in[\![0,m]\!],\qquad \sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}(-1)^{\ell}(\alpha-\ell)_i = \begin{cases} 0 & \text{si } 0\leqslant i\leqslant m-1\\ m\,! & \text{si } i=m\end{cases}$$

L'égalité reste vraie si $m=i=0$.

Démonstration. Soit $(m,\alpha)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$. Considérons la fonction $\Psi : x\longmapsto x^{\alpha-m}(1-x)^m$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et, d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}\forall i\in[\![0,m]\!],\ \forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \Psi^{(i)}(x) &= \sum_{\ell=0}^{i}\binom{i}{\ell}\frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}\left((1-x)^m\right)\frac{\mathrm{d}^{i-\ell}}{\mathrm{d}x^{i-\ell}}(x^{\alpha-m})\\ &= \sum_{\ell=0}^{i}\binom{i}{\ell}(-1)^\ell(m)_\ell(\alpha-m)_{i-\ell}(1-x)^{m-\ell}x^{\alpha-m-i+\ell}\end{aligned}$$

Tous les sommants s'annulent au point 1 sauf le dernier si $i=m$:

$$\forall i\in[\![0,m-1]\!],\ \Psi^{(i)}(1)=0 \qquad \text{et} \qquad \Psi^{(m)}(1)=(-1)^m(m)_m=(-1)^m m\,! \tag{4}$$

D'autre part, la fonction Ψ peut se réécrire de la manière suivante, en utilisant la formule du binôme de Newton :

$$\forall x\in\mathbb{R}^*,\qquad \Psi(x)=\sum_{\ell=0}^{m}\binom{m}{\ell}(-1)^{m-\ell}x^{\alpha-\ell}$$

Ainsi :

$$\forall i \in [\![0, m]\!],\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \Psi^{(i)}(x) = (-1)^m \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell} (-1)^\ell (\alpha - \ell)_i \, x^{\alpha-\ell-i} 0$$

En évaluant au point 1 et en utilisant (4), on obtient le lemme. □

Le polynôme $P_d(f, f', \dots, f^{(d)}, X)$ qui apparaît dans le lemme 1 est de degré au plus égal à $d-1$, le monôme en X^{d-1} étant $(f')^d X^{d-1}$.

Avec la notation (3), la famille $\big((X)_0, (X)_1, \dots, (X)_{d-1}\big)$ est une base de $\mathbb{R}_{d-1}[X]$. On décomposera le polynôme $P_d(f, f', \dots, f^{(d)}, X)$ dans cette base pour démontrer le résultat suivant. Il est important de remarquer que, dans cette base, le coefficient devant $(X)_{d-1}$ est encore $(f')^d$.

Lemme 3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ ne s'annulant pas sur I. Pour tout $(m, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \{-1, 0\}$, on pose* :

$$\Theta(f, m, \alpha) = \sum_{\ell=0}^{m} (-1)^\ell \binom{m}{\ell} f^\ell D^{m+\alpha}(f^{m-\ell})$$

Alors :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*,\ \forall \alpha \in \{-1, 0\}, \qquad \Theta(f, m, \alpha) = \begin{cases} 0 & \textit{si } \alpha = -1 \\ m\,!\,(f')^m & \textit{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

Cette formule reste valable si $m = \alpha = 0$.

Démonstration. Soit $(m, \alpha) \in \mathbb{N}^* \times \{-1, 0\}$. D'après le lemme 1, il existe un polynôme :

$$P_{m+\alpha}(f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}, X) \in (\mathbb{R}[f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}])[X]$$

tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait l'égalité suivante sur l'intervalle I (la fonction f ne s'annulant pas sur cet intervalle) :

$$D^{m+\alpha}(f^k) = k f^{k-m-\alpha} P_{m+\alpha}(f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}, k)$$

Donc :

$$\forall \ell \in [\![0, m]\!], \qquad f^\ell D^{m+\alpha}(f^{m-\ell}) = (m-\ell) f^{-\alpha} P_{m+\alpha}(f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}, m-\ell)$$

On sait maintenant qu'il existe $(c_{m+\alpha,0}, \dots, c_{m+\alpha,m+\alpha-1}) \in (\mathbb{R}[f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}])^{m+\alpha}$ (les $c_{m+\alpha,i}$ sont des polynômes en les dérivées $f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}$) tel que :

$$P_{m+\alpha}(f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}, X) = \sum_{i=0}^{m+\alpha-1} c_{m+\alpha,i} (X)_i$$

donc en particulier :

$$\forall \ell \in [\![0, m]\!], \qquad P_{m+\alpha}(f, f', \dots, f^{(m+\alpha)}, m-\ell) = \sum_{i=0}^{m+\alpha-1} c_{m+\alpha,i}(m-\ell)_i$$

Avant de reporter les différentes expressions dans la somme $\Theta(f, m, \alpha)$ et d'intervertir les deux sommes, remarquons encore que :

$$\forall \ell \in [\![0, m]\!], \qquad (m-\ell)\binom{m}{\ell} = \begin{cases} m\dbinom{m-1}{\ell} & \text{si } 0 \leqslant \ell \leqslant m-1 \\ 0 & \text{si } \ell = m \end{cases}$$

Ainsi :

$$\Theta(f, m, \alpha) = mf^{-\alpha} \sum_{i=0}^{m+\alpha-1} c_{m+\alpha,i} \sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^\ell \binom{m-1}{\ell} (m-\ell)_i \tag{5}$$

On distingue ensuite deux cas.

- ⋆ **Premier cas :** $\alpha = -1$

  Remarquons d'abord que la formule annoncée est immédiate si $m = 1$. Supposons maintenant que $m \geqslant 2$. Pour tout $i \in [\![0, m-2]\!]$, on sait que :

  $$\sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^\ell \binom{m-1}{\ell} (m-\ell)_i = 0$$

  d'après le lemme 2, et donc $\Theta(f, m, -1) = 0$.

- ⋆ **Deuxième cas :** $\alpha = 0$

  En appliquant encore le lemme 2 et en utilisant le fait que $c_{m,m-1} = (f')^m$ (d'après le lemme 1), il reste dans la somme (5) :

  $$\begin{aligned} \Theta(f, m, 0) = mc_{m,m-1} \sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^\ell \binom{m-1}{\ell} (m-\ell)_i &= m(f')^m (m-1)\,! \\ &= m\,!\,(f')^m \end{aligned}$$

Le lemme est démontré. □

Remarque (utile dans la partie IV) : lorsque $m + \alpha \in \mathbb{N}^*$, alors le dernier sommant de $\Theta(f, m, \alpha)$ est la fonction nulle (puisque $D^{m+\alpha}(1) = 0$). Dans ce cas, on a alors :

$$\Theta(f, m, \alpha) = \sum_{\ell=0}^{m-1} (-1)^\ell \binom{m}{\ell} f^\ell D^{m+\alpha}(f^{m-\ell}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha = -1 \\ m\,!\,(f')^m & \text{si } \alpha = 0 \end{cases}$$

III. Le lemme fondamental du calcul des variations

Le résultat suivant est le point de départ de la méthode utilisée dans les deux parties qui suivent.

Définition 1. *Une fonction φ définie sur un intervalle ouvert non vide I de $\mathbb{R}$ est dite à support compact sur I s'il existe un segment $[a, b]$ inclus dans I en dehors duquel φ est identiquement nulle.*

Si φ est une telle fonction et si g est continue sur I, remarquons que l'intégrale $\displaystyle\int_I g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.

Lemme 4 (lemme fondamental du calcul des variations)**.** *Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que pour toute fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$ et à support compact sur I, on a l'égalité* :

$$\int_I g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Alors f est identiquement nulle sur I.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que la fonction g ne soit pas identiquement nulle sur I. Par continuité de g et quitte à remplacer g par $-g$ il existe un intervalle $[a, b]$ inclus dans I (avec $a < b$) sur lequel g prend des valeurs strictement positives. Considérons la fonction φ donnée par :

$$\forall x \in I, \qquad \varphi(x) = \begin{cases} (x-a)^{n+1}(x-b)^{n+1} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La fonction φ est à support compact et elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. En effet, elle est de classe $\mathcal{C}^n$ sur chaque composante connexe de $I \setminus \{a, b\}$ par construction. De plus, a et b sont des racines d'ordre $n+1 > n$ du polynôme $(X-a)^{n+1}(X-b)^{n+1}$ donc :

$$\forall i \in [\![0, n]\!], \qquad \lim_{x \to a^+} \varphi(x) = \lim_{x \to b^-} \varphi(x) = 0$$

Par ailleurs :

$$\big(\forall x \in]a, b[,\ g(x)\varphi(x) > 0\big) \qquad \text{et} \qquad \big(\forall x \in I \backslash]a, b[,\ g(x)\varphi(x) = 0\big)$$

Par stricte positivité de l'intégrale, on a donc (puisque $a < b$) :

$$\int_I f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse. □

Avant de démontrer les deux égalités proposées, faisons encore quelques remarques et introduisons certaines notations.

- $\star$ Si g est une fonction continue sur I et si φ désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ à support compact sur I, alors pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, la fonction $\varphi^{(k)}$ est également à support compact sur I et est continue, donc l'intégrale $\displaystyle\int_I g(x)\varphi^{(k)}(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente.
- $\star$ L'intégrale $\displaystyle\int_I g(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x$ sera notée désormais $\langle g, \varphi\rangle$.
- $\star$ Si g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors la formule d'intégration par parties nous donne :
$$\langle g', \varphi\rangle = -\langle g, \varphi'\rangle$$
puisque φ est à support compact sur I.

Dans les parties IV et V, on suppose que $f : I \to \mathbb{R}$ *ne s'annule pas sur* I, intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

IV. Preuve de la première identité

Soit l'identité à démontrer :

$$(n+1)(f''f^{n+1})^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (f^{n+1-k})^{(n-k)}(f''f^k)^{(k)} \tag{$*$}$$

On considère une fonction φ de classe $\mathcal{C}^n$ et à support compact sur l'intervalle I. Montrons que l'on a l'égalité $\langle A - B, \varphi\rangle = 0$, où l'on a posé :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (f^{n+1-k})^{(n-k)}(f''f^k)^{(k)} \qquad \text{et} \qquad B = (n+1)(f''f^{n+1})^{(n)}$$

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On pose encore $A_k = (f^{n+1-k})^{(n-k)}(f''f^k)^{(k)}$. En intégrant k fois par parties, on a (puisque φ est à support compact sur l'intervalle I qui est ouvert) :

$$\langle A_k, \varphi\rangle = \big\langle D^k(f''f^k), D^{n-k}(f^{n+1-k})\varphi\big\rangle = (-1)^k\big\langle f''f^k, D^k[D^{n-k}(f^{n+1-k})\varphi]\big\rangle$$

La formule de Leibniz nous permet de développer $D^k[D^{n-k}(f^{n+1-k})\varphi]$:

$$\begin{aligned}\langle A_k, \varphi\rangle &= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \big\langle f''f^k, D^{n-j}(f^{n+1-k})D^j(\varphi)\big\rangle \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \big\langle f''f^k D^{n-j}(f^{n+1-k}), D^j(\varphi)\big\rangle\end{aligned}$$

En utilisant à nouveau la linéarité de l'intégrale et en permutant les deux sommes, il vient :

$$\begin{aligned}\langle A, \varphi\rangle &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \langle A_k, \varphi\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n} \binom{n+1}{k}\binom{k}{j} (-1)^k \big\langle f''f^k D^{n-j}(f^{n+1-k}), D^j(\varphi)\big\rangle\end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$\langle B, \varphi\rangle = (n+1)(-1)^n\big\langle f'' f^{n+1}, D^n(\varphi)\big\rangle$$

Ce terme correspond au sommant de $\langle A, \varphi\rangle$ pour $j = n$. On a donc, en arrangeant les coefficients binomiaux à la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}\langle A - B, \varphi\rangle &= \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=j}^{n}\binom{n+1}{k}\binom{k}{j}(-1)^k\big\langle f'' f^k D^{n-j}(f^{n+1-k}), D^j(\varphi)\big\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}\sum_{k=j}^{n}\binom{n+1-j}{k-j}(-1)^k\big\langle f'' f^k D^{n-j}(f^{n+1-k}), D^j(\varphi)\big\rangle\end{aligned}$$

Le changement d'indice $\ell = k - j$ dans la somme intérieure fournit :

$$\begin{aligned}\langle A - B, \varphi\rangle &= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}(-1)^j\left\langle \sum_{\ell=0}^{n-j}(-1)^\ell\binom{n+1-j}{\ell} f'' f^{\ell+j} D^{n-j}(f^{n+1-j-\ell}), D^j(\varphi)\right\rangle \\ &= \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}(-1)^j\left\langle f'' f^j \Theta(f, n+1-j, -1), D^j(\varphi)\right\rangle\end{aligned}$$

avec les notations du lemme 3 et d'après la remarque qui le succède (on a $n - j \in \mathbb{N}^*$ pour tout $j \leqslant n-1$). Toutes les fonctions $\Theta(f, n+1-j, -1)$ sont nulles d'après ce lemme et donc :

$$\langle A - B, \varphi\rangle = 0$$

Cette égalité étant valable pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^n$ et à support compact sur I, on a l'égalité $A = B$ d'après le lemme 4. Ceci démontre $(*)$ sur l'intervalle I et pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ et ne s'annulant pas sur I.

V. Preuve de la deuxième identité

Soit à démontrer l'identité :

$$(f' f^n)^{(n)} - f'(f^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}(f^k)^{(k)}(f'' f^{n-k})^{(n-k-1)} \tag{$**$}$$

La première étape consiste à reformuler $(**)$.

Lemme 5. *L'égalité* $(**)$ *se réécrit comme suit* :

$$(f' f^n)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(f^{n-k})^{(n-k)}(f' f^k)^{(k)} - n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(f^{n-1-k})^{(n-1-k)}(f'^2 f^k)^{(k)}$$

Démonstration. En faisant le changement d'indice $\ell = n - k$, l'égalité $(**)$ est équivalente à :

$$(f' f^n)^{(n)} - f'(f^n)^{(n)} = \sum_{\ell=1}^{n}\binom{n}{\ell}(f^{n-\ell})^{(n-\ell)}(f'' f^\ell)^{(\ell-1)}$$

Pour tout $\ell \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$(f''f^\ell)^{(\ell-1)} = (f'f^\ell)^{(\ell)} - \ell(f'^2 f^{\ell-1})^{(\ell-1)}$$

donc $(**)$ se réécrit, par linéarité de la somme :

$$\begin{aligned}(f'f^n)^{(n)} - f'(f^n)^{(n)} &= \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} (f^{n-\ell})^{(n-\ell)}(f'f^\ell)^{(\ell)} \\ &\quad - n\sum_{\ell=1}^{n} \binom{n-1}{\ell-1} (f^{n-\ell})^{(n-\ell)}(f'^2 f^{\ell-1})^{(\ell-1)}\end{aligned}$$

On remarque que $f'f^{(n)}$ est le terme d'indice $\ell = 0$ de la première somme ci-dessus. Il ne reste plus qu'à changer d'indice dans la seconde somme. $\square$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} R = (f'f^n)^{(n)}, \quad S &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f^{n-k})^{(n-k)}(f'f^k)^{(k)}, \\ T &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (f^{n-1-k})^{(n-1-k)}(f'^2 f^k)^{(k)}. \end{aligned}$$

Il s'agit donc de démontrer que $R = S - nT$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, posons encore :

$$S_k = (f^{n-k})^{(n-k)}(f'f^k)^{(k)} \qquad \text{et, si } k < n, \qquad T_k = (f^{n-1-k})^{(n-1-k)}(f'^2 f^k)^{(k)}$$

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ et à support compact sur l'intervalle ouvert I. Montrons que :

$$\langle S - nT - R, \varphi \rangle = 0$$

On calcule les trois intégrales séparément.

- ⋆ En utilisant n intégrations par parties, on a :

$$\langle R, \varphi \rangle = (-1)^n \big\langle f'f^n, D^n(\varphi) \big\rangle \tag{6}$$

- ⋆ Calculons maintenant $\langle S, \varphi \rangle$. Pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a :

$$\begin{aligned}\langle S_k, \varphi \rangle = \big\langle D^k(f'f^k), D^{n-k}(f^{n-k})\varphi \big\rangle &= (-1)^k \big\langle f'f^k, D^k\big[D^{n-k}(f^{n-k})\varphi\big] \big\rangle \\ &= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \big\langle f'f^k D^{n-j}(f^{n-k}), D^j(\varphi) \big\rangle\end{aligned}$$

d'après la formule de Leibniz. Par linéarité de l'intégrale, il vient (on arrange le produit de coefficients binomiaux de la deuxième ligne à la troisième) :

$$\begin{aligned}
\langle S, \varphi \rangle &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \langle S_k, \varphi \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{k}{j} \big\langle f' f^k D^{n-j}(f^{n-k}), D^j(\varphi) \big\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \sum_{\ell=0}^{n-j} (-1)^\ell \binom{n-j}{\ell} \big\langle f' f^{j+\ell} D^{n-j}(f^{n-j-\ell}), D^j(\varphi) \big\rangle \\
&\text{(en posant } \ell = k-j) \\
&= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \big\langle f' f^j \Theta(f, n-j, 0), D^j(\varphi) \big\rangle
\end{aligned}$$

avec les notations du lemme 3. Et donc, d'après ce lemme :

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)\,! \big\langle (f')^{n-j+1} f^j, D^j(\varphi) \big\rangle$$

c'est-à-dire :

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{n\,!}{j\,!} \big\langle (f')^{n-j+1} f^j, D^j(\varphi) \big\rangle \tag{7}$$

⋆ Enfin, calculons $\langle T, \varphi \rangle$. Pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a de même :

$$\begin{aligned}
\langle T_k, \varphi \rangle &= \big\langle D^k(f'^2 f^k), D^{n-1-k}(f^{n-1-k})\varphi \big\rangle \\
&= (-1)^k \big\langle (f')^2 f^k, D^k\big[D^{n-1-k}(f^{n-1-k})\varphi\big] \big\rangle \\
&= (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \big\langle (f')^2 f^k D^{n-1-j}(f^{n-1-k}), D^j(\varphi) \big\rangle
\end{aligned}$$

puis, avec les mêmes arrangements que dans le calcul de $\langle S, \varphi \rangle$ au point précédent :

$$\begin{aligned}
\langle T, \varphi \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \langle T_k, \varphi \rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \sum_{k=j}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1-j}{k-j} \big\langle (f')^2 f^k D^{n-1-j}(f^{n-1-k}), D^j(\varphi) \big\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \sum_{\ell=0}^{n-1-j} (-1)^\ell \binom{n-1-j}{\ell} \big\langle (f')^2 f^{j+\ell} D^{n-1-j}(f^{n-1-j-\ell}), D^j(\varphi) \big\rangle \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} \big\langle (f')^2 f^j \Theta(f, n-1-j, 0), D^j(\varphi) \big\rangle
\end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3, on obtient :

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \binom{n-1}{j} (n-1-j)\,!\,\big\langle (f')^{n-j+1} f^j, D^j(\varphi) \big\rangle$$

et donc :

$$n\langle T, \varphi \rangle = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{n\,!}{j} \big\langle (f')^{n-j+1} f^j, D^j(\varphi) \big\rangle \tag{8}$$

Les équations (6), (7) et (8) fournissent bien l'égalité $\langle S - nT - R, \varphi \rangle = 0$. On conclut à nouveau avec le lemme 4.

VI. Conclusion

On montre maintenant que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ vérifie $(*)$ et $(**)$ pour tout n.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Supposons $f(x)$ non nul. Alors il existe un intervalle ouvert I contenant x sur lequel f ne s'annule pas ; $(*)$ et $(**)$ sont vérifiées sur I d'après les parties IV et V et en particulier en x.
- Supposons $f(x)$ nul. Alors $(D^k(f^n))(x)$ est nul si $k < n$ et on a : $(D^n(f^n))(x) = n!f'(x)^n$ d'après le lemme 1. Pour n'importe quelle fonction g de classe $\mathcal{C}^\infty$ on a : $(D^k(gf^n))(x) = 0$ si $k < n$ et $(D^n(gf^n))(x) = n!f'(x)^n g(x)$. On en déduit que $(*)$ et $(**)$ sont vérifiées pour cet x, en particulier parce que $(D^n(f'f^{(n)}))(x) = f'(x)(D^n(f^{(n)}))(x) = n!f'(x)^{n+1}$.

Finalement, les identités $(*)$ et $(**)$ sont vérifiées pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.