Questions & réponses

Réponses

R906. Posé dans RMS 126-4.
Soit m et n deux entiers naturels non nuls. On note $A_{m,n}$ le cardinal de l'ensemble des triplets d'entiers naturels (u, v, w) premiers entre eux dans leur ensemble et vérifiant les conditions :

$$0 < u \leqslant m, \ \ 0 < v \leqslant n, \ \ 0 < w < u + v.$$

On note classiquement $\zeta(p) = \sum_{k \geqslant 1} k^{-p}$ pour $p > 1$.

On rappelle que la fonction $\mu : \mathbb{N}^* \to \mathbb{Z}$ de Möbius est donnée par :

- $\mu(1) = 1$ **;**
- $\mu(n) = 0$ **si** n **est divisible par le carré d'un nombre premier ;**
- $\mu(n) = (-1)^k$ **si** n **est le produit de** k **nombres premiers distincts.**

On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x.

a) Démontrer la formule :

$$A_{m,n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right).$$

b) En déduire :

$$\left| A_{m,n} - \frac{mn(m+n)}{2\zeta(3)} \right| \leqslant \left((m+n)^2 + 2mn \right) \frac{\zeta(2) - \zeta(3)}{2},$$

(Saab Abou Jaoudé)

Réponse de Vincent Devinck

a) Par définition, $A_{m,n}$ est le nombre de triplets (u, v, w) d'entiers premiers entre eux dans leur ensemble tels que $1 \leqslant u \leqslant m$, $1 \leqslant v \leqslant n$ et $1 \leqslant w \leqslant u + v - 1$, c'est-à-dire, avec le symbole somme,

$$A_{m,n} = \sum_{\substack{1 \leqslant u \leqslant m \\ 1 \leqslant v \leqslant n \\ 1 \leqslant w \leqslant u+v-1 \\ \mathrm{pgcd}(u,v,w)=1}} 1$$

Cette somme triple se réécrit :

$$A_{m,n} = \sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{n}\sum_{\substack{w=1\\ \mathrm{pgcd}(u,v,w)=1}}^{u+v-1} 1$$

Nous calculons la somme intérieure portée par l'entier w à l'aide de la proposition suivante.

Proposition 1 (formule d'inversion de Möbius)**.** *Pour tout entier naturel ℓ non nul* :

$$\sum_{d|\ell}\mu(d) = \begin{cases} 1 & si\ \ell = 1 \\ 0 & si\ \ell > 1 \end{cases}$$

Démonstration. La formule est évidente si $\ell = 1$. Soit maintenant ℓ un entier supérieur ou égal à 2. Il existe $r \in \mathbb{N}^*$, des nombres premiers deux à deux distincts $p_1, \ldots, p_r$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que $\ell = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$. Par définition de μ, on a $\mu(d) = 0$ si d est divisible par le carré d'un nombre premier donc

$$\sum_{d|\ell}\mu(d) = \sum_{d|p_1\ldots p_r}\mu(d)$$

Un diviseur d de $p_1 \ldots p_r$ peut avoir de 0 à r facteurs premiers distincts. Pour un entier j compris entre 0 et r fixé, il y a $\binom{r}{j}$ façons de choisir j nombres premiers parmi $p_1, \ldots, p_r$, ce qui nous donne $\binom{r}{j}$ diviseurs de $p_1 \ldots p_r$ qui sont le produit de j nombres premiers distincts. De plus, l'image par μ de chacun de ces diviseurs vaut $(-1)^j$ (par définition de μ). Par conséquent : $\displaystyle\sum_{d|\ell}\mu(d) = \sum_{j=0}^{r}\binom{r}{j}(-1)^j = (1-1)^r = 0.$ □

D'après la proposition 1 on a, pour tout $(u, v) \in [\![1, m]\!] \times [\![1, n]\!]$,

$$\sum_{\substack{w=1\\ \mathrm{pgcd}(u,v,w)=1}}^{u+v-1} 1 = \sum_{w=1}^{u+v-1}\sum_{d|\mathrm{pgcd}(u,v,w)}\mu(d) = \sum_{w=1}^{u+v-1}\sum_{\substack{d|u\\ d|v\\ d|w}}\mu(d)$$

et donc

$$A_{m,n} = \sum_{u=1}^{m}\sum_{v=1}^{n}\sum_{w=1}^{u+v-1}\sum_{\substack{d|u\\ d|v\\ d|w}}\mu(d)$$

Les diviseurs d de u, v et w sont inférieurs ou égaux à m et à n donc, en permutant les sommes, il vient :

$$A_{m,n} = \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \mu(d) \sum_{\substack{u=1 \\ d|u}}^{m} \sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} \sum_{\substack{w=1 \\ d|w}}^{u+v-1} 1.$$

Soit $(u,v) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,n]\!]$. La somme $\displaystyle\sum_{\substack{w=1 \\ d|w}}^{u+v-1} 1$ est le nombre de multiples de d dans l'intervalle $[\![1, u+v-1]\!]$ c'est-à-dire $\left\lfloor \dfrac{u+v-1}{d} \right\rfloor$ et donc

$$A_{m,n} = \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \mu(d) \sum_{\substack{u=1 \\ d|u}}^{m} \sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} \left\lfloor \frac{u+v-1}{d} \right\rfloor \tag{1}$$

Si u et v sont des multiples de d, alors $\dfrac{u+v}{d}$ est un entier et comme $-1 \leqslant -\dfrac{1}{d} < 0$, on a $\left\lfloor \dfrac{u+v-1}{d} \right\rfloor = \dfrac{u+v}{d} - 1$. Donc pour tout $(d,u) \in [\![1, \min(m,n)]\!] \times [\![1,m]\!]$, on a

$$\sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} \left\lfloor \frac{u+v-1}{d} \right\rfloor = \left(\frac{u}{d} - 1\right) \sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} 1 + \frac{1}{d} \sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} v$$

Comme ci-dessus, $\displaystyle\sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} 1 = \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$. De même, le changement d'indice $v = dk$ dans la seconde somme nous donne :

$$\sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} v = \sum_{k=1}^{\lfloor n/d \rfloor} dk = \frac{d \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor + 1 \right)}{2}$$

Par conséquent,

$$\sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} \left\lfloor \frac{u+v-1}{d} \right\rfloor = \frac{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}{d} u + \frac{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor - 1 \right)}{2}$$

On termine en calculant la somme indexée par l'entier u :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{u=1 \\ d|u}}^{m} \sum_{\substack{v=1 \\ d|v}}^{n} \left\lfloor \frac{u+v-1}{d} \right\rfloor &= \frac{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor}{d} \sum_{\substack{u=1 \\ d|u}}^{m} u + \frac{\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor - 1 \right)}{2} \sum_{\substack{u=1 \\ d|u}}^{m} 1 \\
&= \frac{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor + 1 \right)}{2} + \frac{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor - 1 \right)}{2} \\
&= \frac{\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \right)}{2}
\end{aligned}$$

En reportant dans (1), on obtient

$$\begin{aligned} A_{m,n} &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{\min(m,n)} \mu(d) \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{d=1}^{+\infty} \mu(d) \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \right) \end{aligned}$$

puisque $\left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor = 0$ ou $\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor = 0$ pour tout $d > \min(m,n)$.

b) Nous utiliserons le développement en série de $1/\zeta(3)$ suivant.

Proposition 2. *On a l'égalité*

$$\frac{1}{\zeta(3)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^3}$$

Démonstration. Les séries $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\mu(k)}{k^3}$ et $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3}$ sont absolument convergentes donc le produit de ces deux séries, en tant que familles sommables, converge aussi absolument. Le terme général de cette série produit est

$$\sum_{\substack{(a,b)\in(\mathbb{N}^*)^2 \\ ab=k}} \frac{\mu(a)}{a^3 b^3} = \frac{1}{k^3} \sum_{d\mid k} \mu(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{si } k > 1 \end{cases}$$

Autrement dit, $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(k)}{k^3} \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^3} \right) = 1$ ce qui démontre la formule annoncée puisque la deuxième série dans ce produit vaut $\zeta(3)$. □

D'après la question **a)** et la proposition 2, on a

$$\frac{mn(m+n)}{2\zeta(3)} - A_{m,n} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(k) \left(\frac{mn(m+n)}{k^3} - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) \right)$$

Pour tout entier naturel k non nul, le nombre $\frac{mn(m+n)}{k^3} - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right)$ est égal à

$$\begin{aligned} &\left(\frac{m}{k} - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \right) \frac{n(m+n)}{k^2} + \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \left(\frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) \frac{m+n}{k} \\ &\qquad + \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \left(\frac{m}{k} - \left\lfloor \frac{m}{k} \right\rfloor + \frac{n}{k} - \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \right) \end{aligned} \tag{2}$$

Nous aurons besoin dans la suite de l'estimation suivante.

Proposition 3. *Pour tout couple* (p,q) *d'entiers naturels non nuls, nous avons les inégalités*

$$0 \leqslant \frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor \leqslant 1 - \frac{1}{q}$$

Démonstration. Soit $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$. L'inégalité de gauche est évidente. Pour celle de droite, on effectue la division euclidienne de p par q. Il existe des entiers naturels r et s tels que $p = qs + r$ où $0 \leqslant r < q$. Alors $\dfrac{p}{q} = s + \dfrac{r}{q} \in [s, s+1[$ et donc $\left\lfloor \dfrac{p}{q} \right\rfloor = s$ et

$$\frac{p}{q} - \left\lfloor \frac{p}{q} \right\rfloor = s + \frac{r}{q} - \left\lfloor s + \frac{r}{q} \right\rfloor = \frac{r}{q} \leqslant 1 - \frac{1}{q}$$

car $r \leqslant q - 1$. □

En utilisant l'inégalité triangulaire, le fait que $|\mu(k)| \leqslant 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'égalité évoquée dans (2) et la proposition 3, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| A_{m,n} - \frac{mn(m+n)}{2\zeta(3)} \right| &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \left(\frac{n(m+n)}{k^2} + \frac{m(m+n)}{k^2} + 2\frac{mn}{k^2} \right) \\
&= \frac{(m+n)^2 + 2mn}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^3} \right) \\
&= \left((m+n)^2 + 2mn\right) \frac{\zeta(2) - \zeta(3)}{2}
\end{aligned}$$

Remarque. Il y a $\dfrac{mn(m+n)}{2}$ triplets d'entiers (u,v,w) tels que $1 \leqslant u \leqslant m$, $1 \leqslant v \leqslant n$ et $1 \leqslant w \leqslant u + v - 1$. En effet, ce nombre est égal à la somme $\displaystyle\sum_{u=1}^{m} \sum_{v=1}^{n} \sum_{w=1}^{u+v-1} 1$ qu'il est aisé de calculer. Ainsi, l'estimation obtenue à la question **b)** nous donne

$$\left| \frac{2A_{m,n}}{mn(m+n)} - \frac{1}{\zeta(3)} \right| \leqslant \frac{(m+n)^2 + 2mn}{mn(m+n)} (\zeta(2) - \zeta(3))$$

soit encore

$$\left| \frac{2A_{m,n}}{mn(m+n)} - \frac{1}{\zeta(3)} \right| \leqslant \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{2}{m+n} \right) (\zeta(2) - \zeta(3)) \tag{3}$$

Le quotient $\dfrac{2A_{m,n}}{mn(m+n)}$ est la probabilité que trois entiers (u,v,w) tels que $1 \leqslant u \leqslant m$, $1 \leqslant v \leqslant n$ et $1 \leqslant w \leqslant u+v-1$ soient premiers entre eux dans leur ensemble et l'estimation (3) nous donne le comportement asymptotique de cette probabilité puisque

$$\lim_{\substack{m \to +\infty \\ n \to +\infty}} \frac{2A_{m,n}}{mn(m+n)} = \frac{1}{\zeta(3)}$$

Ce résultat est à rapprocher avec le résultat bien connu pour deux entiers et qui peut faire l'objet d'un beau développement à l'oral de l'Agrégation : la probabilité que deux entiers de l'intervalle $[\![1, n]\!]$ soient premiers entre eux converge vers $\dfrac{1}{\zeta(2)}$. Nous renvoyons le lecteur à [1] pour plus d'information dans le cas de deux entiers.

Références

[1] S. Francinou, H. Gianella, S. Nicolas, *Oraux X-ENS, Algèbre 1* , Cassini