Questions & réponses

Réponses

R824. Posé dans RMS 124-3
Le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Quel est le maximum de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes ?

(Omar Sonebi)

Réponse de Vincent Devinck

Ce problème a été étudié par Murray Gerstenhaber en 1958 dans [1] où il démontre essentiellement le résultat ci-dessous. On note dans la suite $\mathcal{T}_n(\mathbb{K})$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures et $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ celui des matrices strictement triangulaires supérieures.

Théorème 1 (Gerstenhaber,1958)**.** *Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes.*

1) *On a l'inégalité* $\dim(E) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

2) *L'inégalité précédente est une égalité si et seulement s'il existe une matrice inversible A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $E = A\mathcal{T}_n(\mathbb{K})A^{-1}$.*

On donne ici une démonstration élémentaire du premier point. Soit E un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ constitué de matrices nilpotentes. Notons $\mathcal{I}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures ; on a la décomposition $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{I}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Notons f la projection sur $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{I}_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathrm{Ker}(f{\restriction_E}) = E \cap \mathrm{Ker}(f)$, on a d'après le théorème du rang,

$$\begin{aligned}\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f{\restriction_E})) + \mathrm{rg}(f{\restriction_E}) &= \dim(E \cap \mathrm{Ker}(f)) + \dim(f(E)) \\ &= \dim\left({}^t\big(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\big)\right) + \dim(f(E)) \qquad (1)\end{aligned}$$

avec la notation naturelle

$${}^t\big(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\big) = \left\{{}^t\overline{M}\,;\ M \in E \cap \mathrm{Ker}(f)\right\}$$

Nous sommes donc ramenés à montrer que $\dim\left({}^t\big(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\big)\right) + \dim(f(E)) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$.

- Remarquons d'abord que ${}^t\left(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\right)$ et $f(E)$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. En effet, c'est clair pour $f(E)$ et si $M \in E \cap \mathrm{Ker}(f)$, alors M est une matrice nilpotente triangulaire inférieure ; tous ses coefficients diagonaux sont nécessairements nuls et donc ${}^t\overline{M}$ est une matrice strictement triangulaire supérieure.

- On montre maintenant que les espaces ${}^t\left(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\right)$ et $f(E)$ sont en somme directe dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ en montrant qu'ils sont orthogonaux pour le produit scalaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par la trace, c'est-à-dire

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}\left({}^t\overline{A}B\right) \end{array} \right.$$

Soit donc $A \in E \cap \mathrm{Ker}(f)$ et $B \in f(E)$. Il existe $C \in E$ telle que $B = f(C)$. Posons $D = C - f(C) \in \mathcal{I}_n(\mathbb{K})$ (de sorte que $C = B + D$). Alors

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(AC) - \mathrm{tr}(AD)$$

Comme A et C appartiennent à E, ce sont des matrices nilpotentes donc $\mathrm{tr}(A^2) = \mathrm{tr}(B^2) = 0$ (en effet, 0 est la seule valeur propre complexe des matrices nilpotentes A^2 et C^2 et on sait que la trace d'une matrice est aussi la somme des valeurs propres de la matrice). Par polarisation, on a alors

$$\mathrm{tr}(AC) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{tr}((A + C)^2) - \mathrm{tr}(A^2) - \mathrm{tr}(B^2)\right] = 0$$

car $A + C \in E$ est aussi une matrice nilpotente (car E est un espace vectoriel consitué de matrices nilpotentes et $(A, C) \in E^2$) et donc $\mathrm{tr}((A + C)^2) = 0$. Par ailleurs, la matrice AD est triangulaire strictement inférieure comme produit d'une matrice triangulaire strictement inférieure (la matrice A) avec une matrice triangulaire inférieure et donc $\mathrm{tr}(AD) = 0$. Finalement, $\mathrm{tr}(AB) = 0$.

- On vient de montrer que ${}^t\left(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\right)$ et $f(E)$ sont orthogonaux dans $(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), \varphi)$ donc ils sont en somme directe dans $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$: ${}^t\left(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\right) \oplus f(E) \subset \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. En prenant les dimensions, il vient

$$\dim\left({}^t\left(\overline{E \cap \mathrm{Ker}(f)}\right)\right) + \dim(f(E)) \leqslant \dim(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}))$$

ce qui démontre le résultat d'après l'égalité (1), vu que $\dim(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Bibliographie

[1] M. Gerstenhaber, *On nilalgebras and linear varieties of nilpotent matrices, I,*, Amer. J. Math., 80, 1958.