# Questions & réponses

## Réponses

**R798. Posé dans RMS 123-4**

**Pour tout entier naturel $n$ non nul, on note $q(n)$ le nombre de chiffres dans l'écriture de l'entier $n$ en base 10. On définit ensuite les applications $q_\ell$ ($\ell \in \mathbb{N}^*$) par**

$$q_\ell = \underbrace{q \circ \cdots \circ q}_{\ell \text{ fois}}.$$

**Déterminer la nature de la série**

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{nq_1(n)q_2(n)\dots q_n(n)}.$$

**(Vincent Devinck)**

***Réponse de l'auteur***

Montrons que la série étudiée diverge.

On note log le logarithme décimal, soit $\log(x) = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$, et $\lfloor \cdot \rfloor$ la fonction partie entière..

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, $q(n)$ est l'unique entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^{m-1} \leqslant n \leqslant 10^m - 1$ ; alors $q(n) = 1 + \lfloor \log n \rfloor$.

Afin de motiver les notations qui vont suivre, nous commençons par calculer les nombres $q_\ell(n)$ ($\ell \in \mathbb{N}^*$) pour les premières valeurs de $n$.

- ▷ Si $1 \leqslant n \leqslant 9$, alors $q_\ell(n) = 1$ pour tout $\ell \in \mathbb{N}^*$.
- ▷ Si $10 \leqslant n \leqslant 10^9 - 1$, alors $2 \leqslant q(n) \leqslant 9$, puis $q_\ell(n) = 1$ pour tout $\ell \geqslant 2$.
- ▷ Si $10^9 \leqslant n \leqslant 10^{10^9-1} - 1$, alors $10 \leqslant q(n) \leqslant 10^9 - 1$, puis $2 \leqslant q_2(n) \leqslant 9$ et $q_\ell(n) = 1$ pour tout $\ell \geqslant 3$.
- ▷ Si $10^{10^9-1} \leqslant n \leqslant 10^{10^{(10^9-1)}-1} - 1$, alors $10^9 \leqslant q(n) \leqslant 10^{10^9-1} - 1$, puis $10 \leqslant q_2(n) \leqslant 10^9 - 1$, $2 \leqslant q_3(n) \leqslant 9$ puis $q_\ell(n) = 1$ pour tout $\ell \geqslant 4$.

Pour tout $j \in [\![1, 9]\!]$, on pose $E_0(j) = j$ puis $E_k(j) = 10^{E_{k-1}(j)} - 1$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Remarquons que $E_k(9) = E_{k+1}(1)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. La proposition suivante donne les valeurs des nombres $q_\ell(n)$ pour un entier $n$ fixé. En particulier, on détermine le plus petit entier $\ell$ pour lequel $q_\ell(n) = 1$.

**Proposition 1.** *Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \{E_k(9)+1, E_k(9)+2, \dots, E_{k+1}(9)\}$. Alors $q_{k+1}(n) \geqslant 2$ et $q_{k+2}(n) = 1$. En particulier, $q_\ell(n) = 1$ pour tout $\ell \geqslant k+2$.*

*Démonstration.* Comme la fonction $q$ est croissante, on a $q(n) \in \{q(E_k(9)+1), \dots, q(E_{k+1}(9))\}$, soit $q(n) \in \{E_{k-1}(9)+1, \dots, E_k(9)\}$ ; ensuite $q_2(n) = q(q(n)) \in= \{E_{k-2}(9)+1, \dots, E_{k-1}(9)\}$, ..., $q_k(n) \in \{10, \dots, 10^9 - 1\}$, et finalement $q_{k+1}(n) \in \{2, \dots, 9\}$. On a donc bien $q_{k+1}(n) \geqslant 2$ et $q_{k+2}(n) = 1$. □

Nous allons démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{nq_1(n) \dots q_n(n)}$ est divergente en montrant qu'elle ne satisfait pas le critère de Cauchy. Nous prouvons d'abord la proposition suivante.

**Proposition 2.** *Soit $k \in \mathbb{N}$. On note $f$ la fonction définie par $f(t) = 1 + \log t$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. Pour tout $\ell \in \{1, \dots, k+2\}$, on pose*

$$f_\ell = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{\ell \text{ fois}}.$$

*Par exemple, $f_2(t) = 1 + \log(1 + \log t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$. On a alors les propriétés suivantes :*

(1) *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $q(n) \leqslant f(n)$ ;*

(2) *une primitive de la fonction*

$$t \longmapsto \frac{1}{tf_1(t) \dots f_{k+1}(t)}$$

*sur $[1, +\infty[$ est la fonction $t \longmapsto (\ln 10)^{k+2} f_{k+2}(t)$ ;*

(3) *on a les égalités $f_{k+2}(E_{k+1}(9) + 1) = 2$ et $f_{k+2}(E_k(9) + 1) = 1 + \log 2$.*

*Démonstration.* La propriété (1) provient simplement de l'expression de $q(n)$ et du fait que $\lfloor u \rfloor \leqslant u$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Pour démontrer (2), il suffit de prouver (en utilisant un raisonnement par récurrence) que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $f_{k+2}$ est dérivable sur $[1, +\infty[$, et que

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad f'_{k+2}(t) = \frac{1}{(\ln 10)^{k+2} tf_1(t) \dots f_{k+1}(t)}.$$

Tout d'abord, la fonction $f_2$ est dérivable sur $[1, +\infty[$ et pour tout $t \in [1, +\infty[$,

$$f'_2(t) = f'(f(t))f'(t) = \frac{1}{(\ln 10)(1 + \log t)} \cdot \frac{1}{(\ln 10)t}$$

ce qui démontre la propriété pour $k = 0$. Supposons avoir montré que pour un entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad f'_{k+1}(t) = \frac{1}{(\ln 10)^{k+1} tf_1(t) \dots f_k(t)}$$

et montrons que la propriété reste vraie au rang suivant. La fonction $f_{k+2}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et pour tout $t \in [1,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} f'_{k+2}(t) = f'(f_{k+1}(t))f'_{k+1}(t) &= \frac{1}{(\ln 10)f_{k+1}(t)} \cdot \frac{1}{(\ln 10)^{k+1} t f_1(t)\dots f_k(t)} \\ &= \frac{1}{(\ln 10)^{k+2} t f_1(t)\dots f_k(t) f_{k+1}(t)} \end{aligned}$$

et donc la propriété est héréditaire, ce qui démontre $(2)$. Il reste à établir les égalités de $(3)$. Par définition de $E_{k+1}(9)$, on a

$$f(E_{k+1}(9)+1) = f\big(10^{E_k(9)}\big) = E_k(9)+1$$

puis

$$f_2(E_{k+1}(9)+1) = f(E_k(9)+1) = E_{k-1}(9)+1.$$

En continuant le raisonnement, on trouve que $f_{k+1}(E_{k+1}(9)+1) = E_0(9)+1 = 10$ puis $f_{k+2}(E_{k+1}(9)+1) = f(10) = 2$. En remplaçant $k+1$ par $k$ dans les calculs précédents, on trouve que $f_{k+2}(E_k(9)+1) = f(2) = 1 + \log 2$. $\square$

Nous pouvons maintenant montrer que la série numérique de l'énoncé est divergente. On va procéder à une comparaison série intégrale. Soit $k \in \mathbb{N}$. D'après la proposition 1, on a

$$\begin{aligned} S_k := \sum_{n=E_k(9)+1}^{E_{k+1}(9)} \frac{1}{nq_1(n)q_2(n)\dots q_n(n)} &= \sum_{n=E_k(9)+1}^{E_{k+1}(9)} \frac{1}{nq_1(n)q_2(n)\dots q_{k+1}(n)} \\ &\geqslant \sum_{n=E_k(9)+1}^{E_{k+1}(9)} \frac{1}{nf_1(n)f_2(n)\dots f_{k+1}(n)} \end{aligned}$$

où l'inégalité provient de $(1)$ de la proposition 2. La fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{tf_1(t)\dots f_{k+1}(t)}$ étant décroissante sur $[1,+\infty[$, il vient

$$\begin{aligned} S_k &\geqslant \int_{E_k(9)+1}^{E_{k+1}(9)+1} \frac{\mathrm{d}t}{tf_1(t)\dots f_{k+1}(t)} \\ &= (\ln 10)^{k+2}\Big[f_{k+2}(t)\Big]_{E_k(9)+1}^{E_{k+1}(9)+1} \\ &= (\ln 10)^{k+2}\big(f_{k+2}(E_{k+1}(9)+1) - f_{k+2}(E_k(9)+1)\big) \\ &= (\ln 10)^{k+2}(1-\log 2) \end{aligned}$$

d'après $(2)$ et $(3)$ de la proposition 2. En particulier, $S_k$ ne tend pas vers zéro quand $k$ tend vers $+\infty$. Finalement, la série de terme général $\dfrac{1}{nq_1(n)q_2(n)\dots q_n(n)}$ est divergente.