Programme de Colle 9

Chapitre 10 : Équations différentielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ (et $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$).

- primitive d'une fonction, existence de primitives si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante
- si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$, intégrale de f de a à b :

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

  où $F \in \mathbb{K}^I$ désigne une primitive (quelconque) de f sur I
- théorème fondamental de l'Analyse : si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et si $a \in I$, alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I
- primitives usuelles (*formulaire*), formules de primitivation usuelles (*formulaire*), intégration par parties, changement de variable
- calcul pratique de primitives de fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$
- équation différentielle linéaire du premier ordre ((E) : $y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$), équation homogène associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E), résolution de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière (solution évidente et méthode de la variation de la constante)
- équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ((E) : $y'' + ay' + by = c(x)$, où $a, b \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$), équation homogène et équation caractéristique associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E)
- ensemble des solutions de l'équation homogène
- recherche d'une solution particulière de (E), cas particuliers à connaître : $c(x) = P(x)$ (polynôme), $c(x) = A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ ($A, \lambda \in \mathbb{C}$), $c(x) = B\cos(\omega x)$, $c(x) = B\sin(\omega x)$ ($B, \omega \in \mathbb{R}$)
- principe de superposition (valable pour le premier et le second ordre)
- problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre, unicité de la solution pour un tel problème

Questions de cours

- **Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.**
- Énoncé et démonstration du théorème d'intégration par parties.
- Énoncé et démonstration du théorème de changement de variable.
- Énoncé et démonstration du théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E) (pour le premier ordre).
- Ensemble des solutions de l'équation homogène pour le premier ordre.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- Les formulaires doivent être parfaitement maîtrisés.
- Pour l'intégration par parties et le changement de variable, le programme indique que « pour les applications pratiques,on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité ».