Programme de Colle 9

Chapitre 10 : Groupes, anneaux et corps

Soit E un ensemble non vide.

- loi de composition interne $*$ sur E (le couple $(E,*)$ est appelé *magma*)
- propriétés remarquables de la loi $*$: associativité, commutativité, existence d'un élément neutre (et unicité en cas d'existence), notion d'élément inversible (et unicité de l'inverse dans un magma associatif admettant un élément neutre en cas d'existence, notation générale x^{-1}, notation $-x$ dans un groupe additif), inverse de x^{-1}, inverse de $x*y$ si x et y sont inversibles, tout élément inversible x est régulier, *i.e.* :

$$\forall y,z \in E, \qquad x*y = x*z \implies y=z \qquad \text{et} \qquad y*x = z*x \implies y=z$$

- structure de groupe, notion de groupe abélien (ou commutatif), exemples fondamentaux :
  — groupes additifs $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$
  — groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$, $(\mathbb{U},\times)$, $(\mathbb{U}_n,\times)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
  — groupe des permutations $(S_X,\circ)$ d'un ensemble X non vide
- notion de puissances x^n ($n \in \mathbb{Z}$) dans un groupe, propriétés relatives à x^{m+n}, $x^n y^m$ et $(xy)^n$ si x et y commutent, notation nx dans un groupe additif
- produit d'un nombre fini de groupes
- notion de sous-groupe, caractérisation, tout sous-groupe d'un groupe est un groupe, intersection de sous-groupes
- morphisme de groupes $f : (G,*) \longrightarrow (H,\triangle)$, propriétés : $f(e_G) = e_H$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ et $f(x^n) = f(x)^n$ pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, notion d'isomorphisme de groupes
- si G' est un sous-groupe de G, alors l'image directe $f(G')$ de G' par f est un sous-groupe de H et, si H' est un sous-groupe de H, alors l'image réciproque $f^{-1}(H')$ de H' par f est un sous-groupe de G
- noyau d'un morphisme de groupes : le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est un sous-groupe de G, et f est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$
- image d'un morphisme de groupes : l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f est un sous-groupe de H et f est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = H$
- structure d'anneau, exemples fondamentaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ pour l'addition et la multiplication usuelles, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\times)$, notion d'anneau intègre
- notion d'élément inversible (pour la multiplication) dans un anneau, groupe $A^\times$ des éléments inversibles de A (pour $\times$)
- sous-anneau d'un anneau, tout sous-anneau d'un anneau est un anneau
- structure de corps (*les corps sont commutatifs*)
- calculs dans un anneau : puissances d'un élément, factorisation de $a^n - b^n$ et développement de $(a+b)^n$ (formule du binôme de Newton) si a et b commutent
- morphisme d'anneaux, isomorphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneaux, caractérisation de l'injectivité avec le noyau, caractérisation de la surjectivité avec l'image

Chapitre 11 : Suites numériques

- notion de suite numérique, ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ associés, suite réelle majorée, minorée, bornée (reformulation de la bornitude avec la valeur absolue), sens de variation d'une suite, suite stationnaire
- définition de la convergence d'une suite réelle, unicité de la limite d'une suite convergente
- propriétés :
  — toute suite convergente est bornée
  — le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergente de limite 0
  — si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$
  — $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  — si $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $|u_n| \leqslant x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- limite infinie d'une suite
- opérations sur les limites : droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, règles de calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$, limite de $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si u et v admettent une limite (et si on n'est pas dans une situation d'indétermination), limite de $\frac{1}{u_n}$

Questions de cours

- **Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.**
- Soient $(G,*)$, $(H,\triangle)$ deux groupes, $f:(G,*) \longrightarrow (H,\triangle)$ un morphisme de groupes et G' un sous-groupe de G. Alors $f(G')$ est un sous-groupe de H.
- Soit $(G,*)$ un groupe. On note $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments du groupe. Alors $Z(G)$ est un sous-groupe de G.
- En cas d'existence, la limite d'une suite réelle convergente est unique.
- Toute suite réelle convergente est bornée.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**