Programme de Colle 9

Chapitre 10 : Groupes, anneaux et corps

Soit E un ensemble non vide.

- loi de composition interne $*$ sur E (le couple $(E,*)$ est appelé *magma*)
- propriétés remarquables d'une *bonne* loi de composition interne $*$: associativité, commutativité, existence d'un élément neutre (unicité en cas d'existence), notion d'élément inversible (et unicité de l'inverse dans un magma associatif admettant un élément neutre en cas d'existence, notation générale x^{-1}, notation $-x$ dans un groupe additif), inverse de x^{-1}, inverse de $x*y$ si x et y sont inversibles, tout élément inversible x est régulier, *i.e.* :

$$\forall y,z\in E,\qquad x*y=x*z\implies y=z\qquad\text{et}\qquad y*x=z*x\implies y=z$$

- structure de groupe, notion de groupe abélien (ou commutatif), exemples fondamentaux :
  — groupes additifs $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$
  — groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$, $(\mathbb{U},\times)$, $(\mathbb{U}_n,\times)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$
  — groupe des permutations $(S_X,\circ)$ d'un ensemble X non vide
- notion de puissances x^n ($n\in\mathbb{Z}$) dans un groupe, propriétés relatives à x^{m+n}, x^ny^m et $(xy)^n$ si x et y commutent, notation nx dans un groupe additif
- produit d'un nombre fini de groupes
- notion de sous-groupe, caractérisation, tout sous-groupe d'un groupe est un groupe, intersection de sous-groupes
- morphisme de groupes $f:(G,*)\longrightarrow(H,\triangle)$, propriétés : $f(e_G)=e_H$, $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$ et $f(x^n)=f(x)^n$ pour tout $x\in G$ et tout $n\in\mathbb{Z}$, notion d'isomorphisme de groupes
- si A est un sous-groupe de G, alors l'image directe $f(A)$ de A par f est un sous-groupe de H et, si B est un sous-groupe de H, alors l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B par f est un sous-groupe de G
- noyau d'un morphisme de groupes : le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est un sous-groupe de G, et f est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{e_G\}$
- image d'un morphisme de groupes : l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f est un sous-groupe de H et f est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}(f)=H$
- structure d'anneau, exemples fondamentaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ pour l'addition et la multiplication usuelles, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\times)$, notion d'anneau intègre
- notion d'élément inversible (pour la multiplication) dans un anneau, groupe $A^\times$ des éléments inversibles de A (pour $\times$)
- sous-anneau d'un anneau, tout sous-anneau d'un anneau est un anneau
- structure de corps (*les corps sont commutatifs*)
- calculs dans un anneau : puissances d'un élément, factorisation de a^n-b^n et développement de $(a+b)^n$ (formule du binôme de Newton) si a et b commutent
- morphisme d'anneaux, isomorphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneaux, caractérisation de l'injectivité avec le noyau, caractérisation de la surjectivité avec l'image

Questions de cours

- **Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.**
- Si $(G, *)$ est un groupe et si H et K sont des sous-groupes de G, alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.
- Soient $(G, *)$, $(H, \triangle)$ deux groupes, $f : (G, *) \longrightarrow (H, \triangle)$ un morphisme de groupes et A un sous-groupe de G. Alors $f(A)$ est un sous-groupe de H (pour la loi $\triangle$).
- Soient $(G, *)$, $(H, \triangle)$ deux groupes, $f : (G, *) \longrightarrow (H, \triangle)$ un morphisme de groupes et B un sous-groupe de H. Alors $f^{-1}(B)$ est un sous-groupe de G (pour la loi $*$).
- Un morphisme de groupes $f : (G, *) \longrightarrow (H, \triangle)$ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.
- **Exercice :** soit $(G, *)$ un groupe. On note $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments du groupe. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G (pour la loi $*$).
- **Exercice :** sur l'ensemble $A = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, on considère l'opération $\triangle$ définie par :

$$\forall x, y \in A, \qquad x \triangle y = x + y - xy$$

1. Montrer que $(A, \triangle)$ est un groupe abélien.
2. Montrer que l'application $\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & 1 - x \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**