

PROGRAMME DE COLLE 8

Chapitre 9 : Équations différentielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathcal{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- primitive d'une fonction, existence de primitives si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante
- si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$, intégrale de f de a à b :

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a),$$

où $F \in \mathbb{K}^I$ désigne une primitive (quelconque) de f sur I

- théorème fondamental de l'analyse : si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et si $a \in I$, alors la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) \, dt$ est une primitive de f sur I
- primitives usuelles (*formulaire*), formules de primitivation usuelles (*formulaire*), intégration par parties, changement de variable
- calcul pratique de primitives de fonctions de la forme $x \mapsto \frac{1}{ax^2 + bx + c}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$
- équation différentielle linéaire du premier ordre ((E) : $y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$), équation homogène associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E), résolution de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière (solution évidente et méthode de la variation de la constante)
- équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ((E) : $y'' + ay' + by = c(x)$, où $a, b \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$), équation homogène et équation caractéristique associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E)
- ensemble des solutions de l'équation homogène
- recherche d'une solution particulière de (E), cas particuliers à connaître : $c(x) = P(x)$ (polynôme), $c(x) = A e^{\lambda x}$ ($A, \lambda \in \mathbb{C}$), $c(x) = B \cos(\omega x)$, $c(x) = B \sin(\omega x)$ ($B, \omega \in \mathbb{R}$)
- principe de superposition (valable pour le premier et le second ordre)
- problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre, unicité de la solution pour un tel problème

Questions de cours

- **Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.**
- **Exercice** : déterminer une primitive de la fonction Arctan sur $\mathbb{R}$.
- Soient $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ et $f \in \mathcal{C}(\varphi(I), \mathbb{K})$. Pour tous $a, b \in I$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) \, dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) \, dt$$

- **Exercice** : soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$. Calculer l'intégrale

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^2 f\left(t + \frac{1}{t}\right) \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt$$

en utilisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

- **Exercice** : calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx$$

en utilisant le changement de variable $x = \sin(t)$.

- **Exercice** : en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{e^x - 1}$, déterminer une primitive, sur un intervalle à déterminer, de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$.

- **Exercice** : déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

- On note $\mathcal{S}_E$ (respectivement $\mathcal{S}_H$) l'ensemble des solutions de (E) (respectivement (H)) sur I . Si $f_0 \in \mathcal{S}_E$, alors :

$$\mathcal{S}_E = \{f_0 + g \mid g \in \mathcal{S}_H\}$$

- Soit $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$. Si $A \in \mathbb{K}^I$ est une primitive de a sur I , alors l'ensemble des solutions de :

$$y' + a(x)y = 0 \tag{H}$$

sur I est :

$$\mathcal{S}_H = \left\{ x \mapsto C e^{-A(x)} \mid C \in \mathbb{K} \right\}$$

- **Exercice** : déterminer les fonctions $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + 1$$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- Les formulaires doivent être parfaitement maîtrisés.
- Pour l'intégration par parties et le changement de variable, le programme indique que « pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité ».