Programme de Colle 8

Chapitre 9 : Équations différentielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{D}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- primitive d'une fonction, existence de primitives si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante
- si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et $a, b \in I$, intégrale de f de a à b :
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$
où $F \in \mathbb{K}^I$ désigne une primitive (quelconque) de f sur I
- théorème fondamental de l'Analyse : si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$ et si $a \in I$, alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I
- primitives usuelles (*formulaire*), formules de primitivation usuelles (*formulaire*), intégration par parties, changement de variable
- calcul pratique de primitives de fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$
- équation différentielle linéaire du premier ordre ((E) : $y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$), équation homogène associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E), résolution de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière (solution évidente et méthode de la variation de la constante)
- équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ((E) : $y'' + ay' + by = c(x)$, où $a, b \in \mathbb{K}$ et $c \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$), équation homogène et équation caractéristique associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E)
- ensemble des solutions de l'équation homogène
- recherche d'une solution particulière de (E), cas particuliers à connaître : $c(x) = P(x)$ (polynôme), $c(x) = A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ $(A, \lambda \in \mathbb{C})$, $c(x) = B\cos(\omega x)$, $c(x) = B\sin(\omega x)$ $(B, \omega \in \mathbb{R})$
- principe de superposition (valable pour le premier et le second ordre)
- problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre, unicité de la solution pour un tel problème

Chapitre 10 : Groupes, anneaux et corps

Soit E un ensemble non vide.

- loi de composition interne $*$ sur E (le couple $(E, *)$ est appelé *magma*)
- propriétés remarquables de la loi $*$: associativité, commutativité, existence d'un élément neutre (et unicité en cas d'existence), notion d'élément inversible (et unicité de l'inverse dans un magma associatif admettant un élément neutre en cas d'existence, notation générale x^{-1}, notation $-x$ dans un groupe additif), inverse de x^{-1}, inverse de $x * y$ si x et y sont inversibles, tout élément inversible x est régulier, *i.e.* :
$$\forall y, z \in E, \qquad x * y = x * z \implies y = z \qquad \text{et} \qquad y * x = z * x \implies y = z$$

- structure de groupe, notion de groupe abélien (ou commutatif), exemples fondamentaux :
  - groupes additifs $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$
  - groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$, $(\mathbb{U},\times)$, $(\mathbb{U}_n,\times)$ pour $n\in\mathbb{N}^*$
  - groupe des permutations $(S_X,\circ)$ d'un ensemble X non vide
- notion de puissances x^n ($n\in\mathbb{Z}$) dans un groupe, propriétés relatives à x^{m+n}, x^ny^m et $(xy)^n$ si x et y commutent, notation nx dans un groupe additif
- produit d'un nombre fini de groupes
- notion de sous-groupe, caractérisation, tout sous-groupe d'un groupe est un groupe, intersection de sous-groupes
- morphisme de groupes $f:(G,*)\longrightarrow(H,\triangle)$, propriétés : $f(e_G)=e_H$, $f(x^{-1})=f(x)^{-1}$ et $f(x^n)=f(x)^n$ pour tout $x\in G$ et tout $n\in\mathbb{Z}$, notion d'isomorphisme de groupes
- si G' est un sous-groupe de G, alors l'image directe $f(G')$ de G' par f est un sous-groupe de H et, si H' est un sous-groupe de H, alors l'image réciproque $f^{-1}(H')$ de H' par f est un sous-groupe de G
- noyau d'un morphisme de groupes : le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est un sous-groupe de G, et f est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{e_G\}$
- image d'un morphisme de groupes : l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f est un sous-groupe de H et f est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}(f)=H$
- structure d'anneau, exemples fondamentaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ pour l'addition et la multiplication usuelles, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\times)$, notion d'anneau intègre
- notion d'élément inversible (pour la multiplication) dans un anneau, groupe $A^\times$ des éléments inversibles de A (pour $\times$)
- sous-anneau d'un anneau, tout sous-anneau d'un anneau est un anneau
- structure de corps (*les corps sont commutatifs*)
- calculs dans un anneau : puissances d'un élément, factorisation de a^n-b^n et développement de $(a+b)^n$ (formule du binôme de Newton) si a et b commutent
- morphisme d'anneaux, isomorphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneaux, caractérisation de l'injectivité avec le noyau, caractérisation de la surjectivité avec l'image

Questions de cours

- **Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.**
- Si $(G,*)$ est un groupe et si H et K sont des sous-groupes de G, alors $H\cap K$ est un sous-groupe de G.
- Soient $(G,*)$, $(H,\triangle)$ deux groupes, $f:(G,*)\longrightarrow(H,\triangle)$ un morphisme de groupes et H' un sous-groupe de H. Alors $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G (pour la loi $*$).
- Un morphisme de groupes $f:(G,*)\longrightarrow(H,\triangle)$ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{e_G\}$.
- Soient $(A,+,\times)$ un anneau et $a,b\in A$ tels que $a\times b=b\times a$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\times\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-1-k}\times b^k$$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- Les formulaires doivent être parfaitement maîtrisés.
- Pour l'intégration par parties et le changement de variable, le programme indique que « pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité ».