Programme de Colle 7

Chapitre 7 : Nombres complexes

La construction de l'ensemble des nombres complexes est hors programme.

- ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, opérations $+$ et $\times$, ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R}$, unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, parties réelle $\mathrm{Re}(z)$ et imaginaire $\mathrm{Im}(z)$ d'un nombre complexe z
- $\mathbb{R}$-linéarité des parties réelle et imaginaire
- extension de la notation $\displaystyle\sum_{i\in I} a_i$ à une famille finie de nombres complexes $(a_i)_{i\in I}$, formule relative à $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} x^k$ pour $x \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$, factorisation de $a^n - b^n$, formule du binôme de Newton
- dans un repère orthonormé, image d'un nombre complexe, affixe d'un point ou d'un vecteur du plan, identification entre $\mathbb{C}$ et le plan muni d'un repère orthogonal
- conjugaison : obtention de la forme algébrique d'un nombre complexe de la forme $\frac{z}{z'}$, expression de $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ en utilisant la conjugaison, conjugué d'une somme, d'un quotient, d'un inverse, d'un quotient, caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison :
$$\forall z \in \mathbb{C}, \qquad (z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}) \qquad \text{et} \qquad (z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z)$$
- module d'un nombre complexe ($|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$), interprétation géométrique de $|z|$ et $|z-z'|$, le module étend la valeur absolue aux nombres complexes, cercles du plan, disques (ouverts et fermés) du plan, propriétés du module ($|z| = 0 \iff z = 0$, module du conjugué, module d'un produit, d'un quotient, inégalités $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$)
- inégalité triangulaire :
$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \qquad |z+w| \leqslant |z| + |w| \qquad \text{et} \qquad \big||z| - |w|\big| \leqslant |z+w|$$
- ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1, notation $\mathrm{e}^{i\theta}$, paramétrisation de $\mathbb{U}$:
$$\mathbb{U} = \left\{\mathrm{e}^{i\theta} \,\middle|\, \theta \in \mathbb{R}\right\}$$
- propriétés de $\mathrm{e}^{i\theta}$: $\overline{\mathrm{e}^{i\theta}}$, $\mathrm{e}^{i(\theta \pm \theta')}$, périodicité
- formules d'Euler, formule de Moivre, applications :
  — linéarisation,
  — *anti*-linéarisation,
  — factorisation de $\cos(p) \pm \cos(q)$ et de $\sin(p) \pm \sin(q)$
  — calculs de sommes trigonométriques
- argument d'un nombre complexe non nul (le nombre complexe 0 n'a pas d'argument par convention), ensemble des arguments, notation $\mathrm{Arg}(z) \equiv \theta\ [2\pi]$ si θ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$, détermination principale de l'argument (dans l'intervalle $]-\pi,\pi]$)
- forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul (le nombre 0 n'admet pas de forme trigonométrique par convention)
- propriétés algébriques de l'argument (argument d'un produit, d'un quotient, du conjugué, d'une puissance entière)
- équations *produit-nul* dans $\mathbb{C}$, racine carrée d'un nombre complexe, résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes, relations coefficients-racines

- racines n^{e} de l'unité, description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ associé
- exponentielle complexe : $\overline{\mathrm{e}^{z}}$, $|\mathrm{e}^{z}|$, $\mathrm{e}^{z \pm z'}$, $\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff z \equiv z'\ [2i\pi]$, $\mathrm{Arg}(\mathrm{e}^{z})$
- similitudes directes du plan, interprétation géométrique et classification : une similitude directe du plan est soit une translation, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre
- module et argument de $\dfrac{c-a}{b-a}$ (où $a \neq b$ et $a \neq c$), interprétation géométrique
- extension de la dérivation pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$, les propriétés liées à la dérivabilité et à la dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, restent valables pour des fonctions à valeurs complexes

Chapitre 8 : Relations binaires

Soit E un ensemble non vide.

- une relation binaire $\mathscr{R}$ sur E est un sous-ensemble de E^2 et, si $(x, y) \in \mathscr{R}$, on écrit $x\mathscr{R}y$ et on dit que x est en relation avec y
- exemples usuels : $\leqslant$ dans $\mathbb{R}$, $\leqslant$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, la divisibilité $|$ dans $\mathbb{N}$, l'inclusion $\subset$ dans $\mathscr{P}(E)$
- relation réflexive, antisymétrique, transitive, notion de relation d'ordre sur E (ou d'ensemble $(E, \mathscr{R})$ ordonné)
- ordre partiel, ordre total (ou ensemble totalement ordonné, partiellement ordonné)
- dans un ensemble ordonné $(E, \preccurlyeq)$ et pour un sous-ensemble A de E, notion de minorant, majorant, minimum, maximum de A pour la relation $\preccurlyeq$, unicité du minimum (ou du maximum) en cas d'existence, notation $\min(A)$ et $\max(A)$ (ou $\min(A, \preccurlyeq)$ et $\max(A, \preccurlyeq)$)
- relation symétrique, relation d'équivalence sur E
- exemples : les relations de congruences dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{Z}$ (notation $a \equiv b\ [c]$)
- classes d'équivalences (l'ensemble des classes d'équivalence est noté $E/\mathscr{R}$), propriété : les classes d'équivalence forment une partition de l'ensemble sous-jacent

Questions de cours

- Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.
- Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, alors $\displaystyle\sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0$.
- Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :
$$\mathrm{e}^{z} = \mathrm{e}^{z'} \iff z \equiv z'\,[2i\pi]$$
- Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. L'ensemble des racines n^{e} de z est :
$$\left\{ \sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{i\frac{\theta}{n}}\,\omega_k \,\middle|\, k \in [\![0, n-1]\!] \right\},$$
où $\omega_k = \mathrm{e}^{i\frac{2k\pi}{n}}$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.
- Soit $n \in \mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Z}$, la relation de congruence modulo n est une relation d'équivalence.

Remarques aux colleurs

- Nous n'avons pas encore vu la réduction de $a\cos(x) + b\sin(x)$ en $R\cos(x + \varphi)$.
- Les formules de trigonométries n'ont pas encore été travaillées (chapitre ultérieur). Pour démontrer la formule relative à $\mathrm{e}^{i(\theta+\theta')}$, nous avons admis les formules d'addition du cosinus et du sinus. Celles-ci seront démontrées prochainement.
- La notion d'ensemble quotient est hors programme.
- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**