Programme de Colle 7

Chapitre 8 : Trigonométrie

- pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, notation ensembliste $\alpha\mathbb{Z} + \beta$
- cercle trigonométrique, définition du cosinus, du sinus, de la tangente d'un nombre réel, interprétation géométrique de la tangente en utilisant le cercle trigonométrique
- valeurs remarquables, propriétés de symétrie des fonctions circulaires : périodicité, parité, formules relatives à $\cos(\pi \pm \theta)$, $\sin(\pi \pm \theta)$, $\tan(\pi \pm \theta)$, $\cos\left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)$, *etc.*
- équations trigonométriques (égalités de deux cosinus, de deux sinus, de deux tangentes), inéquations trigonométriques
- formules d'additions (cos, sin et tan), formules de duplication, formules des produits (linéarisation de $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a)\cos(b)$)
- réduction de $a\cos(x) + b\sin(x)$ en $R\cos(x+\varphi)$
- dérivabilité et dérivées des fonctions cos, sin et tan, inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$
- expressions de $\cos(x)$, $\sin(x)$ et $\tan(x)$ en fonction de $t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$
- fonctions circulaires réciproques (Arcsin, Arccos et Arctan) : construction en utilisant le théorème de la bijection et propriétés (symétrie éventuelle, monotonie, continuité, tableau de variation, graphe, dérivabilité en utilisant le théorème de dérivabilité d'une fonction réciproque et dérivée)

Chapitre 9 : Équations différentielles

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point. Les fonctions considérées sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\mathscr{D}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions dérivables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- primitive d'une fonction, existence de primitives si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante
- si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et $a, b \in I$, intégrale de f de a à b :

  $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

  où $F \in \mathbb{K}^I$ désigne une primitive (quelconque) de f sur I
- théorème fondamental de l'Analyse : si $f \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$ et si $a \in I$, alors la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une primitive de f sur I, calcul d'une primitive de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$
- primitives usuelles (*formulaire*), formules de primitivation usuelles (*formulaire*), intégration par parties, changement de variable
- calcul pratique de primitives de fonctions de la forme $x \longmapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$
- équation différentielle linéaire du premier ordre ((E) : $y' + a(x)y = b(x)$ où $a, b \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$), équation homogène associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E), résolution de l'équation homogène, recherche d'une solution particulière (solution évidente et méthode de la variation de la constante)

- équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants ((E) : $y''+ay'+by=c(x)$, où $a,b\in\mathbb{K}$ et $c\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$), équation homogène et équation caractéristique associée
- théorème fondamental sur la structure de l'ensemble des solutions de (E)
- ensemble des solutions de l'équation homogène
- recherche d'une solution particulière de (E), cas particuliers à connaître : $c(x)=P(x)$ (polynôme), $c(x)=A\,\mathrm{e}^{\lambda x}$ $(A,\lambda\in\mathbb{C})$, $c(x)=B\cos(\omega x)$, $c(x)=B\sin(\omega x)$ $(B,\omega\in\mathbb{R})$
- principe de superposition (valable pour le premier et le second ordre)
- problème de Cauchy pour une équation différentielle linéaire du premier ou du second ordre, unicité de la solution pour un tel problème

Questions de cours

- *Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible* (*notamment ici* : *graphes, formules de trigonométrie,...*).
- Connaissant les deux formules relatives à $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$, obtention d'une ou plusieurs formules de trigonométrie.
- Dérivabilité de la fonction Arcsin sur $]-1,1[$ et calcul de Arcsin'.
- Soient $\varphi\in\mathscr{C}^1(I,\mathbb{K})$ et $f\in\mathscr{C}(\varphi(I),\mathbb{K})$. Pour tous $a,b\in I$, on a :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

- On note $\mathscr{S}_E$ (respectivement $\mathscr{S}_H$) l'ensemble des solutions de (E) (respectivement (H)) sur I. Si $f_0\in\mathscr{S}_E$, alors :

$$\mathscr{S}_E=\left\{f_0+g\,\middle|\,g\in\mathscr{S}_H\right\}$$

- Soit $a\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$. Si $A\in\mathbb{K}^I$ est une primitive de a sur I, alors l'ensemble des solutions de :

$$y'+a(x)y=0 \tag{H}$$

sur I est :

$$\mathscr{S}_H=\left\{x\longmapsto C\,\mathrm{e}^{-A(x)}\,\middle|\,C\in\mathbb{K}\right\}$$

Remarques aux colleurs

- Les propriétés des fonctions circulaires réciproques doivent être parfaitement maîtrisées.
- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**