

PROGRAMME DE COLLE 6

Chapitre 6 : Nombres complexes

La construction de l'ensemble des nombres complexes est hors programme.

- ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, opérations $+$ et $\times$, ensemble des imaginaires purs $i\mathbb{R}$, unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, parties réelle $\operatorname{Re}(z)$ et imaginaire $\operatorname{Im}(z)$ d'un nombre complexe z
- $\mathbb{R}$ -linéarité des parties réelle et imaginaire
- somme (finie) de nombres complexes, formule relative à $\sum_{k=p}^q x^k$ pour $x \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$, factorisation de $a^n - b^n$, formule du binôme de Newton
- dans un repère orthogonal, image d'un nombre complexe, affixe d'un point ou d'un vecteur du plan, identification entre $\mathbb{C}$ et le plan muni d'un repère orthogonal (*plan complexe*)
- conjugaison : obtention de la forme algébrique d'un nombre complexe de la forme $\frac{z}{\bar{z}}$, expression de $\operatorname{Re}(z)$ et $\operatorname{Im}(z)$ en utilisant la conjugaison, conjugué d'une somme, d'un inverse, d'un quotient, caractérisation des réels et des imaginaires purs à l'aide de la conjugaison :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad (z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}) \quad \text{et} \quad (z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z)$$

- module d'un nombre complexe ($|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2}$), interprétation géométrique de $|z|$ et $|z - w|$, le module étend la valeur absolue aux nombres complexes, cercles du plan, disques (ouverts et fermés) du plan, propriétés du module ($|z| = 0 \iff z = 0$, module du conjugué, module d'un produit, d'un quotient, inégalités $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|$ et $|\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$)
- inégalité triangulaire :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad ||z| - |w|| \leq |z + w| \leq |z| + |w|$$

- ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1, notation $e^{i\theta}$, paramétrisation de $\mathbb{U}$:

$$\mathbb{U} = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

- propriétés de $e^{i\theta} : \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $e^{i(\theta \pm \theta')}$, périodicité
- formules d'Euler, formule de Moivre, applications :
 - linéarisation,
 - *anti*-linéarisation,
 - factorisation de $\cos(p) \pm \cos(q)$ et de $\sin(p) \pm \sin(q)$
 - calculs de sommes trigonométriques
- argument d'un nombre complexe non nul (le nombre complexe 0 n'a pas d'argument par convention), ensemble des arguments, notation $\operatorname{Arg}(z) \equiv \theta [2\pi]$ si θ est un argument de $z \in \mathbb{C}^*$, détermination principale de l'argument (dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$), caractérisation des nombres réels et des imaginaires purs
- forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul (le nombre 0 n'admet pas de forme trigonométrique par convention)
- propriétés algébriques de l'argument (argument d'un produit, d'un quotient, du conjugué, d'une puissance entière)
- équations *produit-nul* dans $\mathbb{C}$, racine carrée d'un nombre complexe, résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes, relations coefficients-racines
- racines n^{e} de l'unité, description de l'ensemble $\mathbb{U}_n$ associé
- exponentielle complexe : $\overline{e^z}$, $|e^z|$, $\operatorname{Arg}(e^z)$, $e^{z \pm z'}$, caractérisation $e^z = e^{z'} \iff z \equiv z' [2i\pi]$, la fonction $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^*$ est surjective (et n'est pas injective), ensemble des antécédents de $a \in \mathbb{C}^*$ par l'application $\exp$
- similitudes directes du plan, interprétation géométrique et classification : une similitude directe du plan est soit une translation, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de mêmes centres
- module et argument de $\frac{c-a}{b-a}$ (où $a \neq b$ et $a \neq c$), interprétation géométrique

- extension de la dérivation pour des fonctions définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ (les propriétés liées à la dérivabilité et à la dérivation d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée, restent valables pour des fonctions à valeurs complexes)

Questions de cours

- *Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.*
- Inégalité triangulaire :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad |z + w| \leq |z| + |w|$$

- À partir de l'inégalité précédente, montrer que :

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad ||z| - |w|| \leq |z + w|$$

- Obtention de l'une des formules de factorisation relatives à $\cos(p) \pm \cos(q)$ et $\sin(p) \pm \sin(q)$ choisie par le colleur.

Il faudra d'abord obtenir la formule de factorisation relative à $e^{ip} \pm e^{iq}$.

- Pour $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, obtention des formules d'anti-linéarisation de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.
- Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$e^z = e^{z'} \iff z \equiv z' [2i\pi]$$

et pour tout $a \in \mathbb{C}^*$, on a l'égalité suivante (où $\theta \in \mathbb{R}$ est un argument de a) :

$$\exp^{-1}(\{a\}) = \{ \ln(|a|) + i(\theta + 2k\pi) \mid k \in \mathbb{Z} \}$$

- Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $z = r e^{i\theta}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les racines n^e de z sont les nombres complexes de la forme :

$$\sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{i\frac{2k\pi}{n}}, \quad \text{où } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a $\sum_{z \in \mathbb{U}_n} z = 0$.

- **Exercice** : soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. On pose $Z = \frac{z+i}{z-i}$. Montrer que :

$$Z \in \mathbb{R} \iff z \in i\mathbb{R}$$

- **Exercice** : on considère l'application $f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto z^2 + 3z + 2025 \end{cases}$. Caractériser, dans le plan complexe, l'ensemble $f^{-1}(\mathbb{R})$.

- **Exercice** : on considère l'application $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C} \setminus \{1\} & \longrightarrow \mathbb{C} \\ z & \longmapsto \frac{z+1}{z-1} \end{cases}$. Montrer que $\varphi(\mathbb{U} \setminus \{1\}) \subset i\mathbb{R}$.

- **Exercice** : calculer l'intégrale $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)^3 dx$.

- **Exercice** : déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f : x \mapsto \cos(2x) \sin(x)^2$.

- **Exercice** : montrer que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \cos(3\theta) = 4 \cos(\theta)^3 - 3 \cos(\theta)$$

- **Exercice** : pour $(n, x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$, calcul de $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ ou $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$.

Remarques aux colleurs

- L'intégrité a été évoquée, mais nous n'avons pas encore parlé d'anneau ni de groupe.
- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**