

PROGRAMME DE COLLE 5

Chapitre 6 : Nombres réels

- ordre naturel sur $\mathbb{R}$: la relation $\leq$ (définie par : $x \leq y \iff y - x \in \mathbb{R}_+$) est réflexive, symétrique et transitive sur $\mathbb{R}$
- compatibilité de la relation $\leq$ avec les opérations $+$ et $\times$ (ajout dans une inéquation, multiplication par un nombre non nul, *etc.*)
- valeur absolue ($|x| = \max(-x, x)$), interprétation de $|x|$ et $|x - y|$ sur la droite réelle, propriétés algébriques ($|-x|$, $|xy|$, $|x^n|$, $|x/y|$), inégalité triangulaire, propriétés analytiques de la fonction valeur absolue (graphe, sens de variation, domaine de dérivabilité)
- (in)équations avec la valeur absolue : pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, caractérisation de $|x| = \alpha$, $|x| \leq \alpha$, $|x| < \alpha$, $|x| \geq \alpha$ et $|x| > \alpha$
- équations et inéquations classiques dans $\mathbb{R}$:
 - ensemble des solutions (dans $\mathbb{R}$ seulement) d'une équation du second degré à coefficients réels, signe du trinôme associé
 - composition par une fonction strictement monotone dans une (in)équation
 - pour une équation faisant intervenir des logarithmes ou des racines carrées, on commencera par chercher le domaine de validité de l'(in)équation
- partie de $\mathbb{R}$ majorée, minorée, bornée
- maximum (ou plus grand élément), minimum (ou plus petit élément) d'une partie A de $\mathbb{R}$, unicité du maximum et du minimum en cas d'existence, notations $\max(A)$ et $\min(A)$
- notions de bornes supérieure et inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$, notations $\sup(A)$ et $\inf(A)$
- si A possède un maximum (respectivement un minimum), alors A possède une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$ (respectivement une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$)
- propriété de la borne supérieure : toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (résultat analogue pour la borne inférieure), caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure
- partie entière d'un nombre réel
- pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, il existe $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $\beta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tels que $x < \alpha < y$ et $x < \beta < y$
- intervalles de $\mathbb{R}$: une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$, on a $[a, b] \subset X$

Questions de cours

- Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.
- inégalité triangulaire : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|$$

- résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$) d'inconnue $x \in \mathbb{R}$
- Soit $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}$. Si A possède un maximum, alors celui-ci est uniquement déterminé.
- Si une partie non vide A de $\mathbb{R}$ possède un maximum, alors A possède une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$.
- **Exercice** : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+1} = x$.
- **Exercice** : résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+2} < x-4$.
- **Exercice** : on considère l'ensemble

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} \left| \exists m, n \in \mathbb{N}^*, x = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right. \right\}$$

Calculer $\sup(A)$.

Remarques aux colleurs

- Merci d'être très exigeants sur la rédaction.