

PROGRAMME DE COLLE 4

Soient E , F et G désignent trois ensembles non vides.

Chapitre 4 : Applications

- notion d'application de E dans F (défini dans un premier temps comme un triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$, où E est l'ensemble de départ, F est l'ensemble d'arrivée et $\mathcal{G}$ est le graphe de f), notations F^E et $\mathcal{F}(E, F)$
- cas particulier des suites (l'ensemble des suites à valeurs dans E est $E^{\mathbb{N}}$) et des familles $(\lambda_i)_{i \in I}$ d'éléments de E indexée par un ensemble I
- application identité de E (notation Id_E)
- fonction indicatrice d'un ensemble, formules relatives à $\mathbb{1}_{\overline{A}}$, $\mathbb{1}_{A \cap B}$, $\mathbb{1}_{A \cup B}$ et $\mathbb{1}_{A \setminus B}$
- restriction d'une application à un sous-ensemble A de E (notation $f|_A$), prolongement d'une application à un *sur*-ensemble de E
- image (directe) $f(A)$ de $A \in \mathcal{P}(E)$ par l'application f , image réciproque $f^{-1}(B)$ de $B \in \mathcal{P}(F)$ par l'application f
- notion d'antécédent
- application surjective (ou surjection) de E sur F :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

- application injective (ou injection), caractérisation :

$$(f : E \longrightarrow F \text{ est injective}) \iff (\forall x, y \in E, f(x) = f(y) \implies x = y),$$

- si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, toute application $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement monotone sur I est injective
- notion d'application bijective, une application est bijective si et seulement si elle est injective et surjective
- rappel de la notion de composition, associativité de la composition, stabilité de la notion d'injectivité/surjectivité/bijektivité par composition
- application réciproque (si $f \in F^E$, on appelle réciproque de f toute application $g \in E^F$ telle que $f \circ g = \text{Id}_F$ et $g \circ f = \text{Id}_E$)
- une application $f \in F^E$ est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque
- si $f \in F^E$ est bijective, alors il y a unicité de l'application réciproque et elle est notée f^{-1}
- si $f \in F^E$ est bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$
- si $f \in F^E$ et $g \in G^F$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
- étude pratique de la bijectivité d'une application et détermination de l'application réciproque

Questions de cours

Soient E , F , G trois ensembles non vides, $f \in F^E$ et $g \in G^F$.

- Si f admet une application réciproque, alors f est bijective.
- Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
- Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

- Si $g \circ f$ est injective et si f est surjective, alors g est injective.
- Si $g \circ f$ est surjective et si g est injective, alors f est surjective (de E sur F).
- **Exercice** : Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{Q} \setminus \{3\} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ x & \longmapsto & \frac{2x+3}{x-3} \end{cases}$ est injective.
- **Exercice** : Montrer que l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 + x + 1 \end{cases}$ est injective.
- Montrer que l'application th est bijective de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser et déterminer son application réciproque th^{-1} .

Remarques aux colleurs

- On ne distingue pas les notions de fonction et d'application.
- Il ne faut pas proposer d'application de la variable complexe ou à valeurs complexes (l'ensemble des nombres complexes n'ayant pas encore été étudié).
- Le théorème de la bijection n'a pas encore été revu en classe.
- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**