Programme de Colle 3

Chapitre 3 : Éléments de théorie des ensembles

La notion d'ensemble est intuitive.

- notion d'appartenance, ensemble vide, écriture d'un ensemble en compréhension, notion d'inclusion
- la relation $\subset$ est réflexive, symétrique, antisymétrique [1]
- raisonnement par double inclusion pour montrer que $E = F$
- ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$)
- intersection et réunion de deux ensembles, complémentaire de A dans E (notations $\overline{A}$, ${}^{c}A$, $E \setminus A$) différence de A et B (notation $A \setminus B$), généralisation de l'intersection et de la réunion pour une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de sous-ensembles de E
- propriétés des opérations $\cup$ et $\cap$: idempotence, commutativité, associativité, distributivité de la réunion (respectivement de l'intersection) par rapport à l'intersection (respectivement à la réunion), involution $\overline{\overline{A}} = A$ et lois de De Morgan ($\overline{A \cap B}$, $A \setminus (B \cap C)$, idem pour la réunion)
- produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles non vides
- ensemble des parties $\mathscr{P}(E)$ d'un ensemble E
- notion de recouvrement disjoint et de partition d'un ensemble

Chapitre 4 : Calculs de sommes et de produits

- factorielle d'un entier naturel, coefficient binomial, propriétés :
  — symétrie des coefficients binomiaux
  — formule *sans nom* : pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leqslant n$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1}\binom{n}{k}$
  — formule du triangle de Pascal : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a
  $$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$
- notion de somme *simple* et propriétés (linéarité de la somme, relation de Chasles, changement d'indice)
- sommes usuelles à connaître : $\sum\limits_{k=p}^{q} 1$, $\sum\limits_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k$, $\sum\limits_{k=0 \text{ ou } 1}^{n} k^2$, $\sum\limits_{k=p}^{q} x^k$ (pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) et sommes télescopiques (à traiter au cas par cas)
- formule du binôme de Newton
- identité remarquable : factorisation de $a^n - b^n$
- manipulations de sommes doubles :
  — *rectangulaires* $\sum\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}$ (notation $\sum\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$ si $m = n$)
  — *triangulaires* $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$
- manipulations de produits

1. je n'ai pas encore introduit la notion de « relation d'ordre » en classe

Questions de cours

- Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.
- Formule *sans nom*
- Formule du triangle de Pascal
- Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant q$, calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=p}^{q} x^k$
- Calcul de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**