

PROGRAMME DE COLLE 3

Chapitre 3 : Calculs de sommes et de produits

- factorielle d'un entier naturel, coefficient binomial, propriétés :
 - valeur de $\binom{n}{k}$ pour $k \in \{0, 1, 2, n-2, n-1, n\}$
 - symétrie des coefficients binomiaux
 - formule *du pion* : pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$
 - formule du triangle de Pascal : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

- notion de somme *simple* et propriétés (linéarité de la somme, relation de Chasles, changement d'indice)
- sommes usuelles à connaître : $\sum_{k=p}^q 1$, $\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^n k$, $\sum_{k=0 \text{ ou } 1}^n k^2$, $\sum_{k=p}^q x^k$ (pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$) et sommes télescopiques (à traiter au cas par cas)
- formule du binôme de Newton
- factorisation de $a^n - b^n$
- manipulations de sommes doubles :
 - rectangulaires* $\sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} a_{i,j}$ (notation $\sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j}$ si $m = n$)
 - triangulaires* $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{i,j}$ et $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{i,j}$
- manipulations de produits

Questions de cours

- Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.
- formule de factorisation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a, b \in \mathbb{R}, \quad a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$$

- formule du binôme de Newton
- Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\star A = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k+1} 3^k;$$

$$\star B = \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} (i + 2j);$$

$$\star C = \sum_{0 \leq i, j \leq n} (2j + 1);$$

$$\star D = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (2i);$$

$$\star \ E = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \frac{i}{j};$$

$$\star \ F = \prod_{k=1}^n \frac{k^2}{(k+1)(k+2)};$$

$$\star \ G = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k};$$

$$\star \ H = \sum_{i=0}^n ix^i \ (x \in \mathbb{R});$$

$$\star \ I = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}.$$

Remarques aux colleurs

- Merci d'être très exigeants sur la rédaction.