Programme de Colle 29

Chapitre 29 : Probabilités

- vocabulaire de la théorie des probabilités : expérience aléatoire, univers Ω associé (ensemble fini en MPSI), événement (l'ensemble des événements est $\mathscr{P}(\Omega)$), événements incompatibles, événement élémentaire, événement contraire, événement impossible $\varnothing$, événement certain Ω
- système complet (fini) d'événements
- notion de probabilité sur Ω, propriétés : $P(A) \in [0,1]$, $P(\overline{A})$, probabilité d'une réunion d'événements deux à deux incompatibles, $P(A \cup B)$, $P(A \setminus B)$, croissance d'une probabilité, inégalité :
$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
- probabilité uniforme
- probabilité conditionnelle de A sachant B si $P(B) > 0$ (notations $P_B(A)$ et $P(A \mid B)$), l'application $P_B : \mathscr{P}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une probabilité sur Ω
- formule des probabilités composées, formule des probabilités totales, formule de Bayes
- événements indépendants (notation $A \perp\!\!\!\perp B$), si $P(B) > 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_B(A) = P(A)$, événements deux à deux indépendants, événements mutuellement indépendants
- si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, propriété analogue pour la mutuelle indépendance

Chapitre 30 : Variables aléatoires discrètes (finies)

Soit (Ω, P) *un espace probabilisé fini.*

- une variable aléatoire est une application $X \in E^{\Omega}$ où E est un ensemble non vide, l'ensemble $X(\Omega)$ est appelé l'univers image de X
- notations $(X \in A)$, $(X = x)$, $(X \leqslant x)$ et $(y \leqslant X \leqslant x)$ si X est une variable aléatoire *réelle*
- loi P_X de X ($\forall A \in \mathscr{P}(E)$, $P_X(A) = P(X \in A)$), la loi de X est complètement déterminée par la famille $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$, l'application P_X est une probabilité sur E
- la famille $\big((X = x)\big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements, $\displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x) = 1$
- deux variables aléatoires X et Y sont de même loi si $P_X = P_Y$, notation $X \sim Y$
- image $f(X)$ d'une variable aléatoire X par une application f, si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$
- lois usuelles : loi uniforme sur un ensemble fini non vide E (noté $X \sim \mathscr{U}(E)$, notation $X \sim \mathscr{U}(n)$ si $E = [\![1, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$), loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$, loi binomiale $\mathscr{B}(n,p)$
- un couple de variables aléatoires, noté (X, Y), est une variable aléatoire pour lequel l'ensemble $E = E_1 \times E_2$ est un produit cartésien, loi conjointe, lois marginales, détermination des lois marginales à partir de la loi conjointe, loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ (où $x \in X(\Omega)$), généralisation (notion de vecteur aléatoire)
- indépendance de deux variables aléatoires (notation $X \perp\!\!\!\perp Y$), si $X \perp\!\!\!\perp Y$ alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$

- variables aléatoires mutuellement indépendantes, lemme des coalitions (si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \dots, X_n)$, généralisation à plus de deux coalitions)
- somme (finie) de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi de Bernoulli
- espérance d'une variable aléatoire réelle, notion de variable aléatoire centrée, formule *théorique* :
$$E(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P(\{\omega\})$$
- espérance d'une variable aléatoire constante, espérance des lois usuelles : loi de Bernoulli et loi binomiale
- positivité, croissance, linéarité de l'espérance et inégalité triangulaire $|E(X)| \leqslant E(|X|)$
- formule de transfert pour une variable aléatoire et pour un couple de variables aléatoires réelles
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $E(XY) = E(X)E(Y)$ (la réciproque est fausse), généralisation pour une famille de variables aléatoires réelles mutuellement indépendantes
- variance et écart-type $\sigma(X)$ d'une variable aléatoire réelle, notion de variable aléatoire réduite, formule de Kœnig-Huygens :
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$
- variance des lois $\mathscr{B}(p)$ et $\mathscr{B}(n,p)$
- $V(aX+b) = a^2 V(X)$, si $V(X) > 0$ alors la variable aléatoire $\dfrac{X - E(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite
- covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$ de deux variables aléatoires réelles X et Y (si $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$, on dit que X et Y sont *décorrélées*) formule de Kœnig-Huygens :
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$
- si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (la réciproque est fausse)
- propriétés de la covariance : symétrie, bilinéarité et positivité
- formule $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y) \pm 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$, cas particulier de variables aléatoires décorrélées
- généralisation pour la variance de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ (que les variables soient deux à deux décorrélées ou pas)
- inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev

Questions de cours

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [0,1]$ et $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la loi $\mathscr{B}(p)$. Alors $\sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathscr{B}(n,p)$.
- Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0,1]$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Alors [1] $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$.
- Énoncer et démontrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- **Exercice**. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $X \sim \mathscr{U}(n)$. Alors $V(X) = \dfrac{n^2 - 1}{12}$.
- **Exercice**. Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times]0,1[$ et $X \sim \mathscr{B}(n,p)$. Calculer l'espérance de la variable aléatoire $Y = \dfrac{1}{X(X+1)}$.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- En MPSI, les univers (images) sont des ensembles finis.

1. La démonstration de la *formule du pion* peut être demandée.