Programme de Colle 28

Chapitre 28 : Espaces préhilbertiens réels

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

- notion de produit scalaire sur E, exemples usuels : produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire intégral sur $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$, produit scalaire $(A,B) \longmapsto \mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$ sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$
- notions d'espace préhilbertien réel et d'espace euclidien
- norme associée à un produit scalaire, propriétés de la norme (notamment les deux parties de l'inégalité triangulaire et le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire), notion de vecteur unitaire
- inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité
- distance euclidienne d sur $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, propriétés de cette distance
- identités remarquables ($\|x \pm y\|^2$), formules de polarisation, identité du parallélogramme
- notions de vecteurs orthogonaux, de famille orthogonale, de famille orthonormée (ou *orthonormale*)
- toute famille orthogonale constituée de vecteurs non nuls est libre
- théorème de Pythagore
- orthogonal $F^\perp$ d'une partie de E, propriétés (un vecteur de E appartient à $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal à chaque vecteur d'une famille génératrice de F, $E^\perp$, $\{0_E\}^\perp$, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E, $A \subset A^{\perp\perp}$)
- algorithme d'orthogonalisation de Gram-Schmidt
- tout espace euclidien possède une base orthonormée
- calculs pratique (du produit scalaire et de la norme) dans une base orthonormée
- si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors :
  — $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$
  — $F^{\perp\perp} = F$
  — et si E est de dimension finie, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$
- théorème de la base orthonormée incomplète
- projecteur orthogonal p_F sur F (projecteur orthogonal sur F parallèlement à $F^\perp$), expression analytique de p_F dès lors que l'on dispose d'une base orthonormée de F, cas particuliers : projecteur orthogonal sur une droite vectorielle, sur un hyperplan
- distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, théorème de la projection orthogonale, cas particulier : distance à un hyperplan de E

Questions de cours

- Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. L'application :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A, B) & \longmapsto & \operatorname{tr}(A^{\mathrm{T}} B) \end{array} \right.$$

  est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.
- Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel. On note $\| \cdot \|$ la norme associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors :

$$\forall x, y \in E, \qquad |\langle x, y \rangle| \leqslant \|x\| \, \|y\| \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

- Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathscr{L} = (u_1, \ldots, u_n) \in E^n$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de E. Alors $\mathscr{L}$ est libre.
- Soient E un espace préhilbertien réel et $A \in \mathscr{P}(E)$. Alors :
  — $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
  — si A est un sous-espace vectoriel de E, alors A et $A^\perp$ sont en somme directe dans E.
- Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Alors :

$$E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$$

- Soient H un hyperplan de l'espace euclidien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $n \in E \setminus \{0_E\}$ un vecteur normal à H. On pose $D = H^\perp = \operatorname{Vect}(n)$. Pour tout $x \in E$, on a :

$$d(x, D) = \left\| x - \frac{\langle x, n \rangle}{\|n\|^2} n \right\| \qquad \text{et} \qquad d(x, H) = \frac{|\langle x, n \rangle|}{\|n\|}$$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**