Programme de Colle 27

Chapitre 27 : Séries numériques

Le terme général des séries concernées est à priori un nombre complexe.

- notion de série numérique, de terme général, de somme partielle d'indice n, notations $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ et $\sum u_n$
- nature d'une série, somme de la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence de la série
- si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, forme contraposée et notion de divergence grossière
- l'ensemble des séries convergentes a une structure d'espace vectoriel, linéarité de la somme
- reste d'indice n d'une série convergente :

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

- si la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$ est convergente, alors $R_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$
- lien suite-série : la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si la série (télescopique) $\sum\limits_{n \geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ est convergente et, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \left(\lim_{n \to +\infty} u_n \right) - u_0$$

- série géométrique : pour tout $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} q^n$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et, dans ce cas,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

- série exponentielle : pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n\,!}$ est convergente de somme $\mathrm{e}^{\,z}$
- théorème sur les séries alternées : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs décroissante de limite nulle, alors
  - (i) la série (dite alternée) $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n u_n$ est convergente
  - (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste R_n est du signe de $(-1)^{n+1}$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$
  - (iii) la somme S de la série est telle que $0 \leqslant S \leqslant u_0$

- une série à termes positifs est convergente si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée
- théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs (inégalités $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou $u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} v_n$)
- comparaison série-intégrale pour une fonction monotone
- série de Riemann : pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$
- notion de série absolument convergente, lien avec la convergence
- critère de comparaison : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$ sont telles que $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ (ou $u_n \underset{n \to +\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$) alors la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ converge absolument si $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} v_n$ converge
- inégalité triangulaire : si $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} u_n$ est une série absolument convergente, alors :

$$\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Questions de cours

- **Exercice.** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n \to +\infty}{\sim} \ln(n)$.
- **Exercice.** Démontrer que la série (de Riemann) $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente.
- Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n\,!}$ est convergente de somme $\mathrm{e}^{\,z}$.
- **Exercice.** Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n + (-1)^n}}$.
- **Exercice.** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{n \ln(n)}$ est divergente.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- L'étude de séries semi-convergentes n'est pas un attendu du programme.
- Pour une comparaison série-intégrale, un théorème a été énoncé, mais celui-ci n'est pas à mémoriser : les étudiants doivent systématiquement refaire le raisonnement, à adapter au cas par cas suivant la monotonie de la fonction mise en jeu.
- Les critères de D'Alembert et de Cauchy, les propriétés de sommation des relations de comparaison, ainsi que les séries de Bertrand, ne sont pas au programme.