

PROGRAMME DE COLLE 26

Chapitre 26 : Dénombrement

Conformément au programme de MPSI, on appréhende la notion de cardinal d'un ensemble fini de manière intuitive. Les ensembles E et F ci-dessous sont finis.

- le nombre d'éléments d'un ensemble fini E est appelé cardinal de E , notations $|E|$ et $\text{Card}(E)$
- majoration du cardinal d'un sous-ensemble F d'un ensemble fini E , propriété $|E| = |F|$ si et seulement si $F = E$
- si E et F sont des ensembles finis et si $f \in F^E$, alors :
 - si f est injective, alors $|E| \leq |F|$
 - si f est surjective, alors $|E| \geq |F|$
 - si $|E| = |F|$, alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

- cardinal d'une réunion finie de sous-ensembles deux à deux disjoints d'un ensemble fini, cardinal du complémentaire \overline{F} de F dans E , cardinal de $A \cup B$
- cardinal d'un produit cartésien
- un élément de E^p est appelé une p -liste de E , notion de p -arrangement (ou de p -liste sans répétition) de E
- cardinal de F^E , nombre de p -listes d'éléments de E , nombre de p -arrangements de E , nombre d'injections de E vers F
- permutation d'un ensemble fini, nombre de permutations d'un ensemble fini, nombre de bijections de E sur E
- une p -combinaison de E est un sous-ensemble de E de cardinal p , nombre de p -combinaisons de E
- nombre de parties de E (*i.e.* cardinal de $\mathcal{P}(E)$)
- démonstrations combinatoires des formules du triangle de Pascal et du binôme de Newton

Questions de cours

- **Exercice.** Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$.
- **Exercice.** Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E telles que $A \subset B$.
- **Exercice.** Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(5n+1)(5n+6)}$ et calculer sa somme le cas échéant.
Il est possible de proposer n'importe quelle autre série télescopique.
- Théorème sur les séries alternées : énoncé et démonstration de la convergence de la série.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- La formule du crible de Poincaré n'est pas au programme.