Programme de Colle 25

Chapitre 25 : Déterminants

Dans ce qui suit, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, de dimension finie (égale à n) quand il s'agit du déterminant.

- groupe symétrique S_n, notion de permutation σ, notation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$
- pour $\sigma \in S_n$ et $a \in [\![1, n]\!]$, orbite de a sous l'action de σ :
$$\mathrm{Orb}_\sigma(a) = \left\{\sigma^k(a) \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$$
- un cycle de S_n est une permutation admettant une unique orbite contenant au moins deux éléments, la longueur du cycle est le cardinal de cette unique orbite, cette orbite est appelée le support du cycle
- deux cycles de S_n dont les supports sont disjoints commutent
- toute permutation σ de S_n peut se décomposer de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme un *produit* de cycles à supports disjoints (résultat admis en MPSI)
- une transposition de S_n est un cycle de longueur 2
- toute permutation de S_n peut se décomposer comme un produit de transpositions
- il existe un unique morphisme de groupes $\varepsilon : (S_n, \circ) \longrightarrow (\{-1, 1\}, \times)$ (appelé *signature* de S_n) tel que pour toute transposition τ de S_n, on ait $\varepsilon(\tau) = -1$
- motivation géométrique du déterminant en dimension 2 : déterminant et aire orientée d'un parallélogramme engendré par deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan
- notion de forme n-linéaire $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$, d'application antisymétrique, d'application alternée
- une forme n-linéaire f est alternée si et seulement si elle est antisymétrique
- si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ est une famille liée, alors on a l'égalité $f(x_1, \dots, x_n) = 0$
- si f est une forme n-linéaire alternée, alors :
$$\forall \sigma \in S_n,\ \forall x_1, \dots, x_n \in E, \qquad f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_n)$$
- étant donnée une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E (désormais, E est supposé de dimension finie égale à $n \in \mathbb{N}^*$), il existe une unique forme n-linéaire alternée f sur E^n telle que $f(\mathscr{B}) = 1$ (on l'appelle le déterminant dans la base $\mathscr{B}$, noté $\det_{\mathscr{B}}$) et :
$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \qquad \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} x_{\sigma(i), i}$$
où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la famille $(x_{1,i}, x_{2,i}, \dots, x_{n,i})$ est celle des coordonnées du vecteur x dans la base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E
- expression du déterminant d'une famille de deux vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{K}^2$ et d'une famille de trois vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{K}^3$ (formule de Sarrus), le déterminant est noté det, au lieu de $\det_{\mathscr{B}_{\mathrm{can}}}$, lorsque l'on travaille dans la base canonique
- l'ensemble $\Lambda_n(E, \mathbb{K})$ des formes n-linéaires alternées sur E est une droite vectorielle dirigée par $\det_{\mathscr{B}}$ et, pour tout $f \in \Lambda_n(E, \mathbb{K})$, on a $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$
- si $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, alors $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$

- si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')\det_{\mathscr{B}'}$
- le déterminant de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, noté $\det(M)$, est le déterminant de la famille des vecteurs colonnes de M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, $\det(I_n) = 1$
- propriétés : $\det(A^{\mathrm{T}})$, $\det(AB)$ (et $\det(A^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$), $\det(\lambda A)$, caractérisation des matrices inversibles, $\det(A^{-1})$ si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'application $\det : (\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \longrightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$ est un morphisme de groupes
- si $f \in \mathscr{L}(E)$, alors $\det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f))$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ de E choisie, cette quantité est appelée le déterminant de f, noté $\det(f)$
- propriétés : $\det(g \circ f)$, $\det(f^k)$ pour $k \in \mathbb{N}$, $\det(\lambda f)$, caractérisation des automorphismes de E
- déterminant d'une matrice triangulaire
- effet des opérations élémentaires (sur les lignes/colonnes) sur la valeur du déterminant
- mineurs et cofacteurs d'une matrice, développement suivant une ligne ou une colonne : expression du déterminant de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ en fonction des cofacteurs
- déterminant de Vandermonde, retour sur l'interpolation de Lagrange (preuve matricielle de l'existence et de l'unicité d'un polynôme de degré minimal interpolant un nuage de points)
- comatrice, si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}\,\mathrm{Com}(A)^{\mathrm{T}}$

Questions de cours

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire. Alors f est antisymétrique si et seulement si elle est alternée.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : E^n \longrightarrow \mathbb{K}$ une forme n-linéaire alternée. Si $(x_1, \ldots, x_n)$ est une famille liée de vecteurs de E, alors $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
- Calcul du déterminant d'une matrice triangulaire (avec la démonstration du lemme [1]).
- Calcul du déterminant de Vandermonde : énoncé et démonstration.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- La propriété sur l'existence et l'unicité de la décomposition d'une permutation comme produits de cycles à supports disjoints a été admise (conformément au programme de MPSI). Les élèves doivent être capable d'obtenir une telle décomposition.
- L'existence et l'unicité de l'application *signature* a été admise (conformément au programme de MPSI).
- L'*existence* d'une forme n-linéaire alternée f sur E telle que $f(\mathscr{B}) = 1$ (où $\mathscr{B}$ est une base de E) a été admise (conformément au programme de MPSI). L'unicité a par contre été démontrée, pour voir apparaître l'expression du déterminant et son lien avec le groupe symétrique.
- Les étudiants doivent connaître la formule générale du déterminant.

1. Soit $\sigma \in S_n$ tel que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on ait $\sigma(k) \leqslant k$. Alors $\sigma = \mathrm{Id}_{[\![1,n]\!]}$.