

PROGRAMME DE COLLE 24

Chapitre 24 : Applications linéaires (aspect matriciel)

Dans ce qui suit, E, F et G sont trois \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimensions respectives $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, munis de bases \mathcal{B} (et \mathcal{B}'), \mathcal{C} (et \mathcal{C}') et \mathcal{D} respectivement, f est un élément de $\mathcal{L}(E, F)$ et g est un élément de $\mathcal{L}(F, G)$.

- matrice d'un vecteur x de E , d'une famille \mathcal{F} de vecteurs de E dans la base \mathcal{B} , notations $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$
- la matrice de f dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E et F est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$$

- notation $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$, au lieu de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(f)$ dans le cas particulier où $F = E$ et $\mathcal{C} = \mathcal{B}$
- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(0_{\mathcal{L}(E, F)}) = 0_{p, n}$, $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{Id}_E) = I_n$
- l'application :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels

- définition de l'application linéaire f_A canoniquement associée à $A \in \mathcal{M}_{p, n}(\mathbb{K})$ (il s'agit de l'application $f_A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^p)$ dont la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{K}^n et \mathbb{K}^p est A), noyau, image et rang d'une matrice :

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f_A), \quad \text{Im}(A) = \text{Im}(f_A) \quad \text{et} \quad \text{rg}(A) = \text{rg}(f_A)$$

- pour tous $x \in E$ et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f(x)) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$$

- $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}}(g \circ f) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(g) \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$
- l'application :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ f & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) \end{cases}$$

est un isomorphisme d'anneaux

- $f \in \text{GL}(E, F)$ si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$ est inversible et, dans ce cas,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(f^{-1}) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f))^{-1}$$

- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible à droite (respectivement à gauche), alors A est inversible d'inverse l'inverse à droite (respectivement à gauche)
- si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors A est inversible si et seulement si $\text{Ker}(A) = \{0_{\mathbb{R}^n}\}$ si et seulement si les colonnes de A forment une base de \mathbb{K}^n si et seulement si $\text{rg}(A) = n$
- rang d'un système linéaire (défini comme le rang de la matrice du système), dimension du système linéaire homogène associé
- matrice de passage $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de \mathcal{B} à \mathcal{B}' , propriétés :

$$P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'} \in \text{GL}_n(\mathbb{K}) \quad \text{et} \quad (P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$$

- pour tout $x \in E$, on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$
- formule de changement de base :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(f) = P_{\mathcal{C}', \mathcal{C}} \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

et, en particulier, si $f \in \mathcal{L}(E)$, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) P \quad \text{où} \quad P = P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$$

- si $\text{rg}(f) = r \in \llbracket 1, \min(n, p) \rrbracket$, alors il existe une base \mathcal{B} de E et une base \mathcal{C} de F telles que :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r, n-r} \\ 0_{p-r, r} & 0_{p-r, n-r} \end{pmatrix} \text{ (notée } J_r, \text{ matrice canonique de rang } r)$$

- deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes s'il existe $P \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$ et $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $B = P^{-1}AQ$, la relation binaire correspondante est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$
- A et B sont équivalentes si et seulement si A et B sont des matrices d'une même application linéaire si et seulement si A et B sont de même rang
- une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r
- le rang et l'image d'une matrice ne changent pas si on effectue des opérations élémentaires sur les colonnes de la matrice
- le rang et le noyau d'une matrice ne changent pas si on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice
- $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$
- notion de matrice extraite, une matrice est de rang r si et seulement si il existe une matrice extraite de taille $r \times r$ inversible et si toute matrice extraite est de rang inférieur ou égal à r
- trace d'une matrice carrée A (notation $\text{tr}(A)$) propriétés :

$$\text{tr} \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^*, \quad \text{tr}(A) = \text{tr}(A^T) \quad \text{et} \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

- trace de $f \in \mathcal{L}(E)$ (notation $\text{tr}(f)$), trace d'un projecteur
- si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, alors $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$
- deux matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables s'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$, la relation binaire introduite est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, lien avec la notion de matrices équivalentes
- deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme d'un espace vectoriel E dans des bases de E (*mais pas dans des couples de bases*)
- si A et B sont semblables, alors $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$ (et la réciproque est fautive)

Questions de cours

- Énoncer et démontrer les formules de changement de base (pour une application linéaire).
- Pour tous $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
- Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et p un projecteur de E . Alors :

$$\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$$

- **Exercice.** Soient $a, b \in \mathbb{C}$. On considère \mathbb{C} comme un \mathbb{R} -espace vectoriel et on considère l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & az + b\bar{z} \end{cases}$$

Montrer que f est un endomorphisme de \mathbb{C} et déterminer sa matrice dans la base canonique.

- **Exercice.** Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ l'application linéaire dont la matrice dans les bases :

$$\mathcal{B} = ((1, 1), (0, 1)) \text{ (de } \mathbb{R}^2) \quad \text{et} \quad \mathcal{C} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)) \text{ (de } \mathbb{R}^3)$$

est $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression analytique de u .

- **Exercice.** On considère l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 suivant :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - y, x + 3y) \end{cases}$$

et on considère la base $\mathcal{B} = ((1, 2), (-1, 1))$. Déterminer la matrice M de f dans la base \mathcal{B} .

- **Exercice.** Montrer que les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Remarques aux colleurs

- Merci d'être très exigeants sur la rédaction.