Programme de Colle 23

Chapitre 23 : Intégration sur un segment

Dans ce qui suit, I désigne un intervalle d'intérieur non vide, et a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$. Les fonctions ont d'abord été considérées à valeurs réelles.

- notion de fonction uniformément continue sur I
- pour tout $f \in \mathbb{R}^I$, on a les implications :
$$(f \text{ lipschitzienne sur } I) \Longrightarrow (f \text{ uniformément continue sur } I) \Longrightarrow (f \text{ continue sur } I)$$
- théorème de Heine : toute fonction continue sur un segment de $\mathbb{R}$ y est uniformément continue
- notion de subdivision d'un segment, pas d'une subdivision, subdivision régulière de $[a, b]$:
$$\sigma_n = \left(a + k\frac{b-a}{n}\right)_{k \in [\![0,n]\!]}$$
- notion de fonction en escalier sur $[a, b]$ (ensemble associé noté $\mathscr{E}(a, b)$) et de subdivision adaptée
- structure d'anneau et de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{E}(a, b)$
- intégrale d'une fonction en escalier φ, notations $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$ et $\displaystyle\int_a^b \varphi$
- propriétés de l'intégrale pour les fonctions en escalier sur $[a, b]$: linéarité de l'intégrale, relation de Chasles, positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire
- notion de fonction continue par morceaux sur un segment $[a, b]$, subdivision adaptée (ensemble associé noté $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{R})$)
- structure d'anneau et de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{R})$
- densité de $\mathscr{E}(a, b)$ dans $\mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{R})$: pour toute fonction $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a, b], \mathbb{R})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}(a, b)$ tels que :
$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant \psi - \varphi \leqslant \varepsilon$$
- toute fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ est bornée sur $[a, b]$
- construction de l'intégrale de Riemann d'une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$ (notations $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f$ et $\displaystyle\int_a^b f$) :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \inf(E_+(f)) = \sup(E_-(f)),$$
où :
$$E_+(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{E}(a, b),\ f \leqslant \varphi \text{ sur } [a, b] \right\}$$
et :
$$E_-(f) = \left\{ \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t \,\middle|\, \varphi \in \mathscr{E}(a, b),\ \varphi \leqslant f \text{ sur } [a, b] \right\}$$
- extensions des propriétés de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$: linéarité de l'intégrale, relation de Chasles, positivité de l'intégrale, croissance de l'intégrale et inégalité triangulaire
- propriété de nullité de l'intégrale ($a < b$) :

— si f est continue et positive sur $[a,b]$ et si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle sur $[a,b]$,

— si f est continue et positive sur $[a,b]$, et si f n'est pas identiquement nulle sur $[a,b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0$

- notation $\displaystyle\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$ (pour $a \leqslant b$), extension des propriétés précédentes, en particulier :

$$\forall \alpha, \beta \in [a,b], \qquad \left| \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leqslant \int_{\min(\alpha,\beta)}^{\max(\alpha,\beta)} |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

- valeur moyenne d'une fonction continue par morceaux sur $[a,b]$
- (théorème fondamental de l'Analyse) si f est une fonction continue sur I à valeurs réelles et si $a \in I$, alors :

— la fonction $F : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est dérivable sur I

— la fonction F est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a

— en particulier, f admet des primitives sur I

- (corollaire, théorème fondamental du calcul intégral) si f est continue sur I et si F est une primitive de f sur I, alors :

$$\forall a, b \in I, \qquad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

- méthodes de calcul intégral (rappels) : formulaire des primitives usuelles, formulaire de primitivation, intégration par parties, changement de variable
- intégrale et symétrie :

— si f est continue et paire sur $[-a,a]$, alors :

$$\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$$

— si f est continue et impaire sur $[-a,a]$, alors :

$$\int_{-a}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad \int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

— si f est continue et T-périodique ($T > 0$) sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \int_0^{nT} f(t)\,\mathrm{d}t = n\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t$$

- (théorème sur les sommes de Riemann) si $f \in \mathscr{C}_{\mathrm{pm}}([a,b],\mathbb{R})$, alors :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- formule de Taylor avec reste intégral
- conséquences :

— inégalité de Taylor-Lagrange, application : pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k\,!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^x$

— théorème de Taylor-Young

- brève extension de l'intégrale aux fonctions continues par morceaux à valeurs complexes

Questions de cours

- Théorème fondamental de l'Analyse : si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R})$ et si $a \in I$, alors la fonction :

$$F : x \in I \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

  est dérivable sur I de dérivée f
- Formule de Taylor avec reste intégral (énoncé et démonstration)
- **Exercice.** Déterminer une promitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x}{\mathrm{ch}(x)^2}$ sur $\mathbb{R}$.
- **Exercice.** Déterminer une primitive de la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^3}$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant le changement de variable $x = \tan(t)$.
- **Exercice.** Étudier les variations de la fonction suivante sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$

- **Exercice.** Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$v_n = \frac{1}{n} \prod_{k=1}^{n} (n+k)^{\frac{1}{n}}$$

  Montrer que la suite $(v_n)_{n \geqslant 1}$ est convergente et déterminer sa limite quand n tend vers $+\infty$.
- **Exercice.** Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathrm{e}^x$$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- L'**ÉGALITÉ** de Taylor-Lagrange est hors-programme.
- La démonstration du théorème de Heine a été faite (même si elle n'est pas exigible en MPSI).
- Concernant le changement de variable et l'intégration par parties, il y a la mention suivante dans le programme de MPSI : « *Pour les applications pratiques, on ne demande pas de rappeler les hypothèses de régularité* ».