

PROGRAMME DE COLLE 22

L'ensemble \mathbb{K} désigne indifféremment l'un des deux corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} , les lettres E, F et G désignent des \mathbb{K} -espaces vectoriels, et f, g sont des éléments de $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{L}(F, G)$ respectivement.

Chapitre 22 : Applications linéaires (généralités)

En plus du programme précédent :

- corollaire (« théorème de bijectivité automatique ») : si E et F sont de même dimension finie, alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

- si E est de dimension finie, alors :

$$f \in \text{GL}(E) \iff f \text{ est inversible à gauche} \iff f \text{ est inversible à droite}$$

- espaces isomorphes, caractérisation en dimension finie :
 - si E et F sont isomorphes et si E est de dimension finie, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$
 - réciproquement, si E et F sont de même dimension finie, alors ils sont isomorphes
 - tout \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à \mathbb{K}^n
- si E et F sont de dimensions finies, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie égale à :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \dim(F)$$

- si E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E et si $f_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$ et $f_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, alors il existe une unique application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $f|_{E_1} = f_1$ et $f|_{E_2} = f_2$
- rang d'une application linéaire (pour $\text{Im}(f)$ de dimension finie), propriétés (en dimensions finies) :
 - $\text{rg}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$;
 - f est injective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E)$;
 - f est surjective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(F)$;
 - f est bijective si et seulement si $\text{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$.
- si $(u, v) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$, alors :
 - $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$;
 - si u est bijective (respectivement v est bijective), alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$ (respectivement $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$)
- si $\text{Ker}(f)$ admet un supplémentaire S dans E , alors f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$ (forme géométrique du théorème du rang)
- corollaire (formule du rang) : si E est de dimension finie, alors $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rg}(f)$
- si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E , alors on appelle projecteur sur F parallèlement à G l'application :

$$p : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F \end{cases}$$

- si p est l'application ci-dessus, alors $p \in \mathcal{L}(E)$, $p^2 = p$, $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p)$
- définition algébrique d'un projecteur de E (il s'agit d'un endomorphisme idempotent de E), lien avec la définition géométrique

- si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E , alors on appelle symétrie (vectorielle) par rapport à F parallèlement à G l'application :

$$s : \begin{cases} E = F \oplus G & \longrightarrow & E \\ x = x_F + x_G & \longmapsto & x_F - x_G \end{cases}$$

- si s est l'application ci-dessus, alors $s \in \mathcal{L}(E)$, $s^2 = \text{Id}_E$, $F = \text{Im}(s - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$
- définition algébrique d'une symétrie (vectorielle) de E (il s'agit d'un endomorphisme involutif de E), lien avec la définition géométrique, liens entre symétrie et projecteurs
- notion de forme linéaire sur E , ensemble noté E^* , une forme linéaire non nulle est surjective
- un sous-espace vectoriel H de E (de dimension finie ou infinie) est appelé un hyperplan de E s'il existe $\varphi \in E^* \setminus \{0_E\}$ tel que $H = \text{Ker}(\varphi)$, l'équation $\varphi(x) = 0$ est appelée une équation cartésienne de l'hyperplan
- reformulation géométrique :

$$H \text{ hyperplan de } E \iff \forall u \in E \setminus H, E = H \oplus \text{Vect}(u)$$

- si E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, alors les hyperplans de E sont exactement les sous-espaces vectoriels de dimension $n - 1$ de E
- soient H un hyperplan de E et $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0_E\}$ telles que $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\psi = \lambda\varphi$ (deux équations cartésiennes d'un hyperplan sont proportionnelles)
- minoration de la dimension d'une intersection finie d'hyperplans en dimension finie, tout sous-espace de dimension $\dim(E) - r$ de E est l'intersection de r hyperplans de E

Questions de cours

- On suppose que E est de dimension finie. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que s'il existe $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g \circ f = \text{Id}_E$ ou $f \circ g = \text{Id}_E$, alors $f \in \text{GL}(E)$.
- Soient $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{Ker}(f)$ admet un supplémentaire S dans E , alors la restriction de f à S est un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$ (forme géométrique du théorème du rang).
- Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E et si p est le projecteur sur F parallèlement à G , alors $p \in \mathcal{L}(E)$, p est idempotent, $F = \text{Im}(p) = \text{Ker}(p - \text{Id}_E)$ et $G = \text{Ker}(p)$.
- Si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E et si s est la symétrie par rapport à F parallèlement à G , alors s est involutive, $s \in \text{GL}(E)$, et on a les égalités $\text{Ker}(s - \text{Id}_E) = F$ et $\text{Ker}(s + \text{Id}_E) = G$.
- Soit H un hyperplan de E et $\varphi, \psi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$ tels que $H = \text{Ker}(\varphi) = \text{Ker}(\psi)$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $\varphi = \lambda\psi$.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- L'aspect matriciel fait l'objet d'un chapitre ultérieur.