

# PROGRAMME DE COLLE 21

## Chapitre 21 : Espaces vectoriels (cadre de la dimension finie)

cf. programme de colle 20

## Chapitre 22 : Applications linéaires (généralités)

L'ensemble  $\mathbb{K}$  désigne indifféremment l'un des deux corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , les lettres  $E$ ,  $F$  et  $G$  désignent des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, et  $f$ ,  $g$  sont des éléments de  $\mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{L}(F, G)$  respectivement. On note  $\mathbb{K}^{(I)}$  l'ensemble des familles de scalaires presque nulles indexées par  $I$ .

- notion d'application linéaire (préserve les combinaisons linéaires) :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in E, \quad f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$$

- si  $f$  est linéaire, alors  $f(0_E) = 0_F$  (et forme contraposée) et :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}, \forall (x_i)_{i \in I} \in E^I, \quad f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(x_i)$$

- ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$ , application identité  $\text{Id}_E$ , application nulle  $0_{\mathcal{L}(E, F)}$ , endomorphisme de  $E$ , isomorphisme de  $E$  sur  $F$  (ensemble  $\text{GL}(E, F)$ ), automorphisme de  $E$  (groupe linéaire  $\text{GL}(E)$ )
- $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$  a une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  a une structure d'anneau, bilinéarité de la composition des applications linéaires
- si  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(F, G)$ , alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ , si  $f$  est bijective, alors  $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$
- itérés/puissances  $u^k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ) d'un endomorphisme de  $E$  ( $u^0 = \text{Id}_E$ ) et  $u^k$  pour  $k \in \mathbb{Z}$  si  $u \in \text{GL}(E)$
- si  $E'$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $f(E')$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , si  $F'$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ , alors  $f^{-1}(F')$  est un sous-espace vectoriel de  $E$
- noyau  $\text{Ker}(f)$  et image  $\text{Im}(f)$  de  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , ce sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  et de  $F$  respectivement
- $f$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ ,  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$
- si  $(e_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_i))_{i \in I}$
- formes linéaires coordonnées, propriétés
- détermination d'une application linéaire par l'image d'une base : si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$  et si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille quelconque de vecteurs de  $F$ , alors :

$$\exists! f \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in I, f(e_i) = f_i$$

- si  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$ , alors :
  - $f$  est injective si et seulement si la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est libre ;
  - $f$  est surjective si et seulement si la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est génératrice de  $F$  ;
  - $f$  est bijective si et seulement si la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une base de  $F$ .
- corollaire (« théorème de bijectivité automatique ») : si  $E$  et  $F$  sont de même dimension finie, alors :

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}$$

## Questions de cours

- **Exercice.** Montrer que l'application :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (2x - 3y, x + y) \end{cases}$$

est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

- Si  $f \in \text{GL}(E, F)$ , alors  $f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ .
- Si  $X$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $f(X)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
- L'application  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est injective si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$ .
- **Exercice.** On considère les vecteurs :
  - $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (1, 1, 0)$ ,  $e_3 = (1, 0, 0)$  de  $\mathbb{R}^3$  ;
  - $\varepsilon_1 = (1, 2)$ ,  $\varepsilon_2 = (0, 1)$ ,  $\varepsilon_3 = (-1, 1)$  de  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Justifier qu'il existe une unique application linéaire  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$  telle que :

$$f(e_1) = \varepsilon_1, \quad f(e_2) = \varepsilon_2 \quad \text{et} \quad f(e_3) = \varepsilon_3$$

(b) Déterminer l'expression analytique de  $f$ .

- Si  $\mathcal{B} = (e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$ , alors  $f$  est injective si et seulement si  $(f(e_i))_{i \in I}$  est libre.

## Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- L'aspect matriciel fera l'objet d'un chapitre ultérieur.