Programme de Colle 20

Chapitre 20 : Espaces vectoriels (généralités)

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce qui suit, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

- notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel E : loi interne, loi externe, propriétés des lois $+$ et $\cdot$, vecteur nul 0_E, vecteurs, scalaires, espace nul $\{0_E\}$
- équations produits dans un espace vectoriel :

$$\forall(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \qquad \lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$$

- espaces vectoriels usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, espace de fonctions $\mathbb{K}^\Omega$ (où Ω est un ensemble non vide), cas particulier de l'espace des suites $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, espace de matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- produit cartésien fini d'espaces vectoriels
- notion de combinaison linéaire d'une famille de vecteurs $(u_1, \ldots, u_p)$, extension à une famille quelconque $(u_i)_{i\in I}$ par l'introduction de la notion de famille presque nulle $(\lambda_i)_{i\in I}$ de scalaires (ensemble noté $\mathbb{K}^{(I)}$)
- notion de sous-espace vectoriel :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall x, y \in F,\ x + \lambda y \in F \end{cases}$$

- tout sous-espace vectoriel F de E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (et $0_F = 0_E$)
- exemples : $\mathbb{K}_n[X]$, droite vectorielle et plan vectoriel d'un espace vectoriel, ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ou du second ordre, espace des suites convergentes, espaces des matrices diagonales, triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur un intervalle ($n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$)
- intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel
- sous-espace vectoriel de E engendré par une partie A de E (intersection des sous-espaces vectoriels de E contenant A), notation $\mathrm{Vect}(A)$ (ou $\mathrm{Vect}(a_i)_{i\in I}$), tout sous-espace vectoriel de E contenant A contient également $\mathrm{Vect}(A)$ et $A \subset \mathrm{Vect}(A)$
- description de $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$ comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(x_i)_{i\in I}$
- si $A \subset B$, alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$ et si $a \in A$ est tel que $a \in \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$, alors on a l'égalité $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(A \setminus \{a\})$
- notion de famille libre, de famille génératrice d'un espace et de base
- existence et unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base d'un espace vectoriel, notion de coordonnées
- bases canoniques des espaces vectoriels classiques $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- si $(P_i)_{i\in I}$ est une famille de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts, alors $(P_i)_{i\in I}$ est libre
- toute sous-famille d'une famille libre est libre, si $\mathscr{L}$ est libre et si $x \in E$ ne s'exprime pas comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathscr{L}$, alors $(\mathscr{L}, x)$ est libre
- toute sur-famille d'une famille génératrice reste génératrice
- si F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, définition de $F + G$, structure d'espace vectoriel de $F + G$, notion de somme directe (notation $F \oplus G$)
- la somme $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$
- notion de sous-espaces vectoriels supplémentaires

Chapitre 21 : Espaces vectoriels (cadre de la dimension finie)

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel différent de l'espace nul.

- un espace vectoriel est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie

- résultat préliminaire : si E est de dimension finie et si E est engendré par $n \in \mathbb{N}^*$ vecteurs, alors toute famille libre de vecteurs de E est constituée d'au plus n vecteurs
- théorème (algorithme de la base incomplète) : si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est une famille génératrice de E et si $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant k}$ est libre, alors il existe une partie J de $[\![1, n]\!]$ qui contient $[\![1, k]\!]$ telle $(e_i)_{i \in J}$ soit une base de E

On suppose que E est de dimension finie et on considère deux sous-espaces vectoriels F et G de E.

- corollaires : théorème de la base incomplète (toute famille libre de E peut être complétée en une base de E), théorème de la base extraite (de toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E), existence d'une base
- deux bases d'un espace de dimension finie ont le même nombre de vecteurs, définition de la dimension, dimension de l'espace nul et base
- si $\dim(E) = n \in \mathbb{N}^*$, alors :
  — toute famille libre de vecteurs de E contient au plus n vecteurs ;
  — toute famille génératrice de E contient au moins n vecteurs ;
  — toute famille libre de vecteurs de E constituée de n vecteurs est une base de E ;
  — toute famille génératrice de E constituée de n vecteurs est une base de E
- dimension des espaces vectoriels classiques :
  — $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
  — l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y' + a(t)y = 0$ (où $a \in \mathscr{C}(I, \mathbb{C})$) est une droite vectorielle ;
  — si $a, b \in \mathbb{C}$, l'ensemble des solutions de l'équation différentielle homogène $y'' + ay' + by = 0$ est un plan vectoriel ;
  — si $a, b \in \mathbb{C}$, l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telles que :
  $$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+2} + a u_{n+1} + b u_n = 0$$
  est un plan vectoriel
- dimension d'un produit cartésien $E \times F$ (où E et F sont des espaces vectoriels de dimensions finies)
- dimension d'un sous-espace, propriétés $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ et $\dim(E) = \dim(F) \iff E = F$
- formule de Grassmann : $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
- existence d'un supplémentaire en dimension finie, dimension du supplémentaire
- caractérisation de la supplémentarité en dimension finie :
  $$E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}$$
- rang d'une famille finie $\mathscr{F}$ de vecteurs :
  $$\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\mathrm{Vect}(\mathscr{F}))$$
- propriétés du rang :
  — $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(\dim(E), \mathrm{card}(\mathscr{F}))$;
  — $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{card}(\mathscr{F}) \iff \mathscr{F}$ est libre ;
  — $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(E) \iff \mathscr{F}$ est génératrice de E

Questions de cours

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors F et G sont en somme directe si et seulement si $F \cap G = \{0_E\}$.
- **Exercice.** On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :
  $$F = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x - y + z = 0\big\} \qquad \text{et} \qquad G = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$$
  Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
- **Exercice.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et x, y, z trois vecteurs de E tels que la famille $\mathscr{L} = (x, y, z)$ soit libre. On pose :
  $$u = x + y, \qquad v = y + z \qquad \text{et} \qquad w = x + z$$
  Montrer que la famille $\mathscr{F} = (u, v, w)$ est libre.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**