Programme de Colle 20

Chapitre 20 : Analyse asymptotique

- notion de fonction négligeable devant (dominée par, équivalente à) une fonction au voisinage d'un point a de $\overline{\mathbb{R}}$, notations :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \mathrm{o}(g(x)), \qquad f(x) \underset{x\to a}{=} \mathcal{O}(g(x)) \qquad \text{et} \qquad f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x),$$
Les relations ont été définies pour des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a, conformément à ce qui est indiqué dans le programme.
- propriétés des différentes relations, notamment :
$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x\to a}{=} g(x) + \mathrm{o}(g(x)),$$
compatibilité de la relation $\underset{x\to a}{\sim}$ avec la multiplication, le quotient, la valeur absolue, l'exponentiation
- si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et, si g est à valeurs positives au voisinage de a, alors il en est de même pour f
- principe de substitution : si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et si $\varphi(y) \xrightarrow[y\to b]{} a$, alors $f(\varphi(y)) \underset{y\to b}{\sim} g(\varphi(y))$
- équivalents usuels en zéro (*voir formulaire*)
- théorème des gendarmes pour les équivalents : si $f, g, h : I \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ sont telles que $f \leqslant g \leqslant h$ sur I et si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} h(x)$ ($a \in \overline{I}$), alors $g(x) \underset{x\to a}{\sim} f(x)$
- reformulation des croissances comparées avec la relation de négligeabilité
- notion de développement limité et de partie régulière, le développement limité peut donner le signe d'une fonction au voisinage du point où l'on écrit celui-ci
- une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ admet un $\mathrm{DL}_1(a)$ si et seulement si elle est dérivable en a
- si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors les coefficients de la partie régulière sont uniquement déterminés
- si f est paire, alors les coefficients des monômes de degrés impairs de la partie régulière du $\mathrm{DL}_n(a)$ sont nuls (propriété analogue pour f impaire)
- théorème de Taylor-Young, obtention des développements limités à tout ordre en 0 des fonctions usuelles (*voir formulaire*)
- opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient, composition et intégration
- comparaison de suites : $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(v_n)$, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$, propriétés associées, réécriture des équivalents usuels pour les suites
- applications :
  — calcul de limites
  — position relative locale d'une courbe et de sa tangente
  — étude d'extrema locaux dès lors que l'on dispose de :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \lambda(x-a)^2 + \mathrm{o}\big((x-a)^2\big) \qquad \text{avec} \qquad \lambda \in \mathbb{R}^*$$
  — calcul du développement asymptotique (*i.e.* en $+\infty$ ou en $-\infty$) d'une fonction (à l'ordre 1) pour étudier l'existence d'une asymptote oblique

— développement asymptotique d'une suite d'intégrales (exercice)
— développement asymptotique d'une suite implicite (exercice)
— développement asymptotique d'une suite récurrente (exercice)
— développement limité d'une bijection réciproque (exercice)

- formule de Stirling, traduction en terme de développement asymptotique de $\ln(n\,!)$:

$$\ln(n\,!) \underset{n\to+\infty}{=} n\ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln\left(\sqrt{2\pi}\right) + \mathrm{o}(1)$$

Questions de cours

- **En plus de l'une des questions ci-dessous :** *rappeler le développement limité à l'ordre truc en* 0 *de la fonction machin*
- Déterminer le $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\mathrm{Arctan}(x)$ (avec démonstration).
- Déterminer le développement asymptotique de $\ln(n\,!)$ connaissant la formule de Stirling.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, I un ensemble non vide et $(F_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. Alors $F = \bigcap_{i\in I} F_i$ est un sous-espace vectoriel de E.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**