

PROGRAMME DE COLLE 2

Chapitre 2 : Éléments de logique et de théorie des ensembles

- notion d'assertion (mathématique), valeur de vérité, notion de proposition (= assertion vraie), connecteurs logiques (*et*, *ou*, négation, $\implies$ et $\iff$)
- $(P \implies Q)$ est la proposition (non P) ou Q , notions de conditions *nécessaires* et *suffisantes*
- propriétés des connecteurs logiques : double négation, associativité du *et* et du *ou*, distributivité du *et* (respectivement du *ou*) par rapport au *et* (respectivement par rapport au *ou*), négation d'une implication, lois de De Morgan (négation d'un *et*, d'un *ou*), équivalence et double implication
- quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$ (et $\exists!$), négation d'une assertion quantifiée, permutation de deux symboles de même nature
- quelques méthodes de démonstration :
 - raisonnement par déduction
 - raisonnement par contraposition (l'assertion $(P \implies Q)$ est équivalente à $(\text{non } Q \implies \text{non } P)$)
 - raisonnement par disjonction de cas
 - raisonnement par l'absurde
 - raisonnement par analyse-synthèse
 - raisonnement par récurrence : récurrences *simple*, *double* et *forte* (axiome : toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum)
- notion intuitive d'ensemble
- notion d'appartenance, ensemble vide, écriture d'un ensemble en compréhension, notion d'inclusion
- la relation $\subset$ est réflexive, antisymétrique (raisonnement par double inclusion pour démontrer que deux ensembles sont égaux) et transitive
- intersection et réunion de deux ensembles, complémentaire de A dans E (notations $\overline{A}$, A^c , $E \setminus A$), différence de A et B (notation $A \setminus B$), généralisation de l'intersection et de la réunion pour une famille quelconque $(A_i)_{i \in I}$ de sous-ensembles de E
- propriétés des opérations $\cup$ et $\cap$, notamment : commutativité, associativité, distributivité de la réunion (respectivement de l'intersection) par rapport à l'intersection (respectivement à la réunion), $\overline{\overline{A}} = A$, lois de De Morgan $(\overline{A \cap B}, A \setminus (B \cap C))$, idem pour la réunion)
- produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles non vides
- ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble E
- notion de recouvrement disjoint et de partition d'un ensemble

Questions de cours

- Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.
- Une application directe du cours peut aussi faire l'objet d'une question de cours.
- Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ peut s'écrire d'une unique manière comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
- Formule *du pion* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad \binom{n+1}{k+1} = \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$$

et formule du triangle de Pascal :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

- Pour tous $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$, on a $\sum_{k=p}^q x^k = x^p \frac{1 - x^{q-p+1}}{1 - x}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Remarques aux colleurs

- Les propriétés relatives aux connecteurs logiques ont été démontrées à l'aide de tables de vérité.
- Pour information, les exercices suivants (entre autres) ont été traités dans le cours pour illustrer les différents types de raisonnements.
 - **Exercice** : montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair.
 - **Exercice** : montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.
 - **Exercice** : montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$x \neq y \implies \frac{2x+1}{x-1} \neq \frac{2y+1}{y-1}$$

- **Exercice** : montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.
- **Exercice** : résoudre l'équation $x = \sqrt{-6x-5}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
- **Exercice** : montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se décompose, d'une unique manière, comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
- **Exercice** : on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = 1$ et par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Montrer que, pour tout entier naturel n , on a $u_n = 2^{n+1} - 1$.

- **Exercice** : pour tout entier naturel n , on a $\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- **Exercice** : on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 16$ et par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} + 6u_n$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2(-1)^n + 3 \times 6^n$$

- **Exercice** : on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$$

est telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq 2^n$$

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**