

# PROGRAMME DE COLLE 19

## Chapitre 19 : Analyse asymptotique

*En exercices* : applications des développements limités (études locales de fonctions : tangentes et positions relatives, extremum local, asymptote oblique, développements asymptotiques de suites définies par une intégrale, de suites récurrentes ou de suites implicites).

## Chapitre 20 : Espaces vectoriels (généralités)

L'ensemble  $\mathbb{K}$  désigne indifféremment l'un des deux corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Dans ce qui suit,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- notion de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  : loi interne, loi externe, propriétés des lois  $+$  et  $\cdot$ , vecteur nul  $0_E$ , vecteurs, scalaires, espace nul  $\{0_E\}$
- équations produits dans un espace vectoriel :

$$\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \quad \lambda x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)$$

- espaces vectoriels usuels :  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ , espace de fonctions  $\mathbb{K}^\Omega$  (où  $\Omega$  est un ensemble non vide), cas particulier de l'espace des suites  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , espace de matrices  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- produit cartésien fini d'espaces vectoriels
- notion de combinaison linéaire d'une famille de vecteurs  $(u_1, \dots, u_p)$ , extension à une famille quelconque  $(u_i)_{i \in I}$  par l'introduction de la notion de famille presque nulle  $(\lambda_i)_{i \in I}$  de scalaires (ensemble noté  $\mathbb{K}^{(I)}$ )
- notion de sous-espace vectoriel :

$$F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E \iff \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in F, x + \lambda y \in F \end{cases}$$

- tout sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (et  $0_F = 0_E$ )
- exemples :  $\mathbb{K}_n[X]$ , droite vectorielle et plan vectoriel d'un espace vectoriel, ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ou du second ordre, espace des suites convergentes, espaces des matrices triangulaires supérieures, triangulaires inférieures, espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^n$  sur un intervalle ( $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ )
- intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel
- sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par une partie  $A$  de  $E$  (intersection des sous-espaces vectoriels de  $E$  contenant  $A$ ), notation  $\text{Vect}(A)$  (ou  $\text{Vect}(a_i)_{i \in I}$ ), tout sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $A$  contient également  $\text{Vect}(A)$  et  $A \subset \text{Vect}(A)$
- description de  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$  comme l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille  $(x_i)_{i \in I}$
- si  $A \subset B$ , alors  $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$  et si  $a \in A$  est tel que  $a \in \text{Vect}(A \setminus \{a\})$ , alors on a l'égalité  $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(A \setminus \{a\})$
- notion de famille libre, de famille génératrice d'un espace et de base
- existence et unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base d'un espace vectoriel, notion de coordonnées
- bases canoniques des espaces vectoriels classiques  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  et  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

- si  $(P_i)_{i \in I}$  est une famille de polynômes non nuls et de degrés deux à deux distincts, alors  $(P_i)_{i \in I}$  est libre
- toute sous-famille d'une famille libre est libre, si  $\mathcal{L}$  est libre et si  $x \in E$  ne s'exprime pas comme combinaison linéaire des vecteurs de  $\mathcal{L}$ , alors  $(\mathcal{L}, x)$  est libre
- toute sur-famille d'une famille génératrice reste génératrice

## Questions de cours

- **Exercice.** Montrer que  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + z = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^3$ .
- **Exercice.** Montrer que  $H = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid XP - P' = 0_{\mathbb{C}[X]}\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{C}[X]$ .
- **Exercice.** Montrer que  $K = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid M + M^T = 0_n\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .
- Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $I$  un ensemble non vide et  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $F = \bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , il existe une unique famille presque nulle de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  telle que  $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ .
- **Exercice.** Dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ , on considère les vecteurs :

$$c : x \mapsto \cos(x), \quad s : x \mapsto \sin(x) \quad \text{et} \quad t : x \mapsto x \cos(x)$$

Montrer que la famille  $(c, s, t)$  est libre.

## Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- La notion de dimension est étudiée dans le chapitre suivant.