

PROGRAMME DE COLLE 18

Chapitre 19 : Analyse asymptotique

- notion de fonction négligeable devant (dominée par, équivalente à) une fonction au voisinage d'un point a de $\overline{\mathbb{R}}$, notations :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x)), \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} \mathcal{O}(g(x)) \quad \text{et} \quad f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x),$$

Les relations ont été définies pour des fonctions ne s'annulant pas au voisinage de a , conformément à ce qui est indiqué dans le programme.

- propriétés des différentes relations, notamment :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x)),$$

compatibilité de la relation $\underset{x \rightarrow a}{\sim}$ avec la multiplication, le quotient, la valeur absolue, l'exponentiation, etc.

- si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et, si g est à valeurs positives au voisinage de a , alors il en est de même pour f
- principe de substitution : si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$ et si $\varphi(y) \xrightarrow{y \rightarrow b} a$, alors $f(\varphi(y)) \underset{y \rightarrow b}{\sim} g(\varphi(y))$
- équivalents usuels en 0 (*voir formule*)
- théorème des gendarmes pour les équivalents : si $f, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}_+$ sont telles que $f \leq g \leq h$ sur I et si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} h(x)$ ($a \in \overline{I}$), alors $g(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f(x)$
- reformulation des croissances comparées avec la relation de négligeabilité
- notion de développement limité et de partie régulière
- une fonction définie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ admet un $DL_1(a)$ si et seulement si elle est dérivable en a
- si f admet un $DL_n(a)$, alors les coefficients de la partie régulière sont uniquement déterminés
- si f est paire, alors les coefficients des monômes de degrés impairs de la partie régulière du $DL_n(a)$ sont nuls (propriété analogue pour f impaire)
- théorème de Taylor-Young, obtention des développements limités à tout ordre en 0 des fonctions usuelles (*voir formule*)
- troncature d'un développement limité
- opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient, composition et intégration
- comparaison de suites : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o(v_n)$, $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, propriétés associées, réécriture des équivalents usuels pour les suites
- formule de Stirling, traduction en terme de développement asymptotique de $\ln(n!)$:

$$\ln(n!) \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) - n + \frac{\ln(n)}{2} + \ln(\sqrt{2\pi}) + o(1)$$

- applications des développements limités :
 - calculs de limites
 - position relative locale d'une courbe et de sa tangente
 - étude d'extrema locaux dès lors que l'on dispose de :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(a) + \lambda(x-a)^2 + o((x-a)^2) \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

- calcul du développement asymptotique (*i.e.* en $+\infty$ ou en $-\infty$) d'une fonction (à l'ordre 1) pour étudier l'existence d'une asymptote oblique
- développement asymptotique d'une suite d'intégrales (exercice)

Questions de cours

- **En plus de l'une des questions ci-dessous :**
 - *rappeler le développement limité à l'ordre $truc$ en 0 de la fonction $machin$;*
 - *et rappeler l'équivalent usuel en 0 de la fonction $truc$.*
- Calculer le $DL_7(0)$ de Arctan .
- Déterminer le $DL_3(0)$ de $f : x \mapsto \text{Arctan}(e^{-x})$.
- Calculer le $DL_3(0)$ de $\tan$.
- Applications de la formule de Stirling :
 - donner un équivalent *simple* de $\binom{2n}{n}$ quand n tend vers $+\infty$;
 - déterminer le développement asymptotique de $\ln(n!)$ (en $o(1)$) connaissant la formule de Stirling.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**