Programme de Colle 18

Chapitre 18 : Polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ (suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, notation $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, addition dans $\mathbb{K}[X]$, multiplication par un scalaire
- unicité des coefficients d'un polynôme
- degré d'un polynôme, ensemble $\mathbb{K}_d[X]$, coefficient dominant, $\deg(\lambda P)$ (pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$), inégalité $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$ (avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$)
- produit de deux polynômes, degré d'un produit
- $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif, formule du binôme de Newton, factorisation de $P^n - Q^n$, intégrité de $\mathbb{K}[X]$, les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls
- composition de deux polynômes, degré de $P \circ Q$ si Q n'est pas un polynôme constant
- notion de diviseur et de multiple dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes associés :
$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \qquad (A \mid B \text{ et } B \mid A) \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*,\ A = \lambda B$$
- la relation $\mid$ est réflexive et transitive et est compatible avec la relation $\leqslant$ sur les degrés au sens suivant :
$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}), \qquad A \mid B \implies \deg(A) \leqslant \deg(B)$$
- théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- PGCD de deux polynômes, deux PGCD de A et B sont associés, le PGCD de A et B (noté $A \wedge B$) est le polynôme unitaire de degré maximal divisant A et B
- relation de Bézout, théorème de Bézout (critère de primalité), lemme de Gauss
- PPCM de deux polynômes
- PGCD d'une famille finie de polynômes, relation de Bézout, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, polynômes deux à deux premiers entre eux, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux qui divisent P, alors $A_1 \ldots A_n$ divise P
- fonction polynomiale associée à un polynôme, méthode de Horner (lien avec Python : évaluation polynomiale et complexité temporelle)
- racine d'un polynôme, $a \in \mathbb{K}$ est racine de P si et seulement si $X - a \mid P$
- si P est de degré $d \in \mathbb{N}$, alors P a au plus d racines, si $P \in \mathbb{K}_d[X]$ et si P admet au moins $d+1$ racines, alors $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$
- identification d'un polynôme et de sa fonction polynomiale associée
- multiplicité $m_P(a)$ d'une racine a, un polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ si $\deg(P) = \displaystyle\sum_{a \in \mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(P)} m_P(a)$ (définition), P est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = C_P \displaystyle\prod_{a \in \mathrm{Rac}_{\mathbb{K}}(P)} (X-a)^{m_P(a)}$ (où C_P est le coefficient dominant de P)
- relations coefficients/racines (formules de Viète)

- dérivation formelle d'un polynôme, degré de P', de $P^{(n)}$, formules relatives à $(P+Q)^{(n)}$, $(PQ)^{(n)}$ (formule de Leibniz), $(P\circ Q)'$, formule de Taylor polynomiale (en 0 et en $a \in \mathbb{K}$), reformulation de la notion de multiplicité à l'aide des dérivées successives
- polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$
- théorème de D'Alembert-Gauss, les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont ceux de degré 1, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, factorisation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

- applications :
  — deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si leurs ensembles de racines complexes sont disjoints ;
  — si $A, B \in \mathbb{C}[X]$, alors $A \mid B$ si et seulement si :

$$\mathrm{Rac}_{\mathbb{C}}(A) \subset \mathrm{Rac}_{\mathbb{C}}(B) \qquad \text{et} \qquad (\forall a \in \mathbb{C},\ m_A(a) \leqslant m_B(a))$$

- si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\overline{\lambda}$ est racine de P et $m_P(\lambda) = m_P(\overline{\lambda})$
- les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif
- décomposition de $P \in \mathbb{R}[X]$ (non constant) en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$
- polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ d'une famille de scalaires deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$, polynôme interpolateur de Lagrange de degré minimal (au plus égal à $n-1$), l'ensemble des polynômes P tels que $P(x_k) = y_k$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ est :

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} y_k L_k + Q \prod_{k=1}^{n} (X - x_k) \;\middle|\; Q \in \mathbb{K}[X] \right\}$$

Questions de cours

- Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$a \text{ est racine de } P \iff X - a \text{ divise } P$$

- Formule de Taylor polynomiale (cas $a = 0$) :

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \qquad P = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{P^{(n)}(0)}{n\,!} X^n$$

- Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors :

$$P \wedge Q = 1 \iff \mathrm{Rac}_{\mathbb{C}}(P) \cap \mathrm{Rac}_{\mathbb{C}}(Q) = \varnothing$$

- Définition des polynômes de Lagrange associés à des scalaires deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$). Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \qquad P(x_k) = y_k,$$

  où $y_1, \dots, y_n$ sont des scalaires quelconques fixés.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**