

PROGRAMME DE COLLE 17

Chapitre 17 : Polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ (suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, notation $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, addition dans $\mathbb{K}[X]$, multiplication par un scalaire
- unicité des coefficients d'un polynôme
- degré d'un polynôme, ensemble $\mathbb{K}_d[X]$, coefficient dominant, $\deg(\lambda P)$ (pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$), inégalité $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ (avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$)
- produit de deux polynômes, degré d'un produit
- $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif, formule du binôme de Newton, factorisation de $P^n - Q^n$, intégrité de $\mathbb{K}[X]$, les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls
- composition de deux polynômes, degré de $P \circ Q$ si Q n'est pas un polynôme constant
- notion de diviseur et de multiple dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes associés :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad (A \mid B \text{ et } B \mid A) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B)$$

- la relation $\mid$ est réflexive et transitive et est compatible avec la relation $\leq$ sur les degrés au sens suivant :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}), \quad A \mid B \implies \deg(A) \leq \deg(B)$$

- théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- PGCD de deux polynômes, deux PGCD de A et B sont associés, le PGCD de A et B (noté $A \wedge B$) est le polynôme unitaire de degré maximal divisant A et B
- relation de Bézout, théorème de Bézout (critère de primalité), lemme de Gauss
- PPCM de deux polynômes
- PGCD d'une famille finie de polynômes, relation de Bézout, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, polynômes deux à deux premiers entre eux, si $A_1, \dots, A_n$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux qui divisent P , alors $A_1 \dots A_n$ divise P
- fonction polynomiale associée à un polynôme, méthode de Horner (lien avec Python : évaluation polynomiale et complexité temporelle)
- racine d'un polynôme, $a \in \mathbb{K}$ est racine de P si et seulement si $X - a \mid P$
- si P est de degré $d \in \mathbb{N}$, alors P a au plus d racines, si $P \in \mathbb{K}_d[X]$ et si P admet au moins $d + 1$ racines, alors $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$
- identification d'un polynôme et de sa fonction polynomiale associée

- multiplicité $m_P(a)$ d'une racine a , un polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ si $\deg(P) = \sum_{a \in \text{Rac}_{\mathbb{K}}(P)} m_P(a)$ (définition), P est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = C_P \prod_{a \in \text{Rac}_{\mathbb{K}}(P)} (X - a)^{m_P(a)}$ (où $C_P \in \mathbb{K}^*$ est le coefficient dominant de P)

- relations coefficients/racines (formules de Viète)
- dérivation formelle d'un polynôme, degré de P' , de $P^{(n)}$, formules relatives à $(P+Q)^{(n)}$, $(PQ)^{(n)}$ (formule de Leibniz), $(P \circ Q)'$, formule de Taylor polynomiale (en 0 et en $a \in \mathbb{K}$), reformulation de la notion de multiplicité à l'aide des dérivées successives
- polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$
- théorème de D'Alembert-Gauss, les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont ceux de degré 1, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \mathbb{C}_0[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$, exemple à connaître :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$$

- applications :
 - deux éléments de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement si leurs ensembles de racines complexes sont disjoints ;
 - si $A, B \in \mathbb{C}[X]$, alors $A \mid B$ si et seulement si :

$$\text{Rac}_{\mathbb{C}}(A) \subset \text{Rac}_{\mathbb{C}}(B) \quad \text{et} \quad (\forall a \in \text{Rac}_{\mathbb{C}}(A), m_A(a) \leq m_B(a))$$

- si $\lambda \in \mathbb{C}$ est racine de $P \in \mathbb{R}[X]$, alors $\bar{\lambda}$ est racine de P et $m_P(\lambda) = m_P(\bar{\lambda})$
- les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont les polynômes (à coefficients réels) de degré 1 et les polynômes de degré 2 de discriminant strictement négatif
- décomposition de $P \in \mathbb{R}[X]$ (non constant) en produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$
- polynômes de Lagrange $L_1, \dots, L_n$ d'une famille de scalaires deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$, polynôme interpolateur de Lagrange de degré minimal (au plus égal à $n - 1$), l'ensemble des polynômes P tels que $P(x_k) = y_k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est :

$$\left\{ \sum_{k=1}^n y_k L_k + Q \prod_{k=1}^n (X - x_k) \mid Q \in \mathbb{K}[X] \right\}$$

Chapitre 18 : Fractions rationnelles

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- notion de fraction rationnelle, ensemble $\mathbb{K}(X)$ (la construction de ce corps est hors-programme), $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$
- représentant $\frac{P}{Q}$ d'une fraction rationnelle, représentant irréductible d'une fraction rationnelle
- opérations dans $\mathbb{K}(X)$ (addition, multiplication interne et multiplication par un scalaire)
- degré d'une fraction rationnelle, propriétés du degré ($\deg(F + G)$, $\deg(FG)$)
- notion de racine et de pôle, multiplicité d'une racine, multiplicité d'un pôle
- *fonction* rationnelle associée à une fraction rationnelle
- partie entière d'une fraction rationnelle
- décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$, décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ (démonstrations hors programme)
- dérivée logarithmique : décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ ou $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$
- applications : primitives de fractions rationnelles, calculs de dérivées n^{e} de fonctions rationnelles

Questions de cours

- Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors :

$$P \wedge Q = 1 \iff \text{Rac}_{\mathbb{C}}(P) \cap \text{Rac}_{\mathbb{C}}(Q) = \emptyset$$

- Définition des polynômes de Lagrange associés à des scalaires deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n$ (où $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$). Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad P(x_k) = y_k,$$

où $y_1, \dots, y_n$ sont des scalaires quelconques fixés.

- Soit $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \mathbb{K}_0[X]$. Écrire la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ et la démontrer.
- **Exercice** : factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ (comme produit de facteurs irréductibles) le polynôme $P = X^6 - 1$.
- **Exercice** : factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$ (comme produit de facteurs irréductibles) le polynôme $P = X^4 + 1$.

Remarques aux colleurs

- Merci d'être très exigeants sur la rédaction.