Programme de Colle 16

Chapitre 16 : Fonctions convexes

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction.

- notion de fonction convexe/concave
- la fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tous x_1, x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, la courbe représentative de $f|_{[x_1,x_2]}$ est en-dessous de la corde joignant les points de la courbe d'abscisses x_1 et x_2
- inégalité de Jensen : si f est convexe sur I alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et pour tous $x_1, \dots, x_p \in I$, on a l'inégalité
$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$
- convexité et croissance des pentes :
  - la fonction f est convexe sur I si et seulement pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$
  - la fonction f est convexe sur I si et seulement si pour tout $a \in I$ la fonction ci-dessous est croissante sur $I \setminus \{a\}$:
$$\tau_a : \begin{cases} I \setminus \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{cases}$$
- si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I si f est deux fois dérivable sur I)
- application : convexité de exp sur $\mathbb{R}$, concavité de ln sur $\mathbb{R}_+^*$
- position de la courbe d'une fonction convexe dérivable par rapport aux tangentes : si f est une fonction dérivable et convexe sur I, alors
$$\forall a, x \in I, \qquad f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$
- application (inégalités de convexité classiques) :
$$(\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x), \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x)$$

Chapitre 17 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

- notions de matrices à n lignes et p colonnes (ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), matrice nulle $0_{n,p}$, matrice colonne, matrice ligne, matrice carrée (notations $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, 0_n), matrice identité I_n, matrice scalaire, matrice diagonale, triangulaire supérieure/inférieure (ensembles $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$)
- somme de deux matrices de même taille, $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien, multiplication d'une matrice par un scalaire, notion de combinaison linéaire de matrices de mêmes tailles

- matrice élémentaire $E_{i,j} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, symbole de Kronecker et égalité $E_{i,k} = \big(\delta_{i,k}\delta_{j,\ell}\big)_{\substack{1\leqslant k\leqslant n,\\ 1\leqslant \ell\leqslant p}}$ tout élément de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se décompose comme une somme de matrices élémentaires
- produit matriciel de deux matrices de tailles compatibles, associativité du produit matriciel, bilinéarité, la matrice identité est l'élément neutre
- si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors $AX = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} x_k C_k$ où $C_1, \ldots, C_k$ sont les colonnes de A (et $x_1, \ldots, x_k$ les composantes de X)
- transposée de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notation A^{T}, linéarité de la transposition, involution, transposée d'un produit
- matrice carrée symétrique, antisymétriques
- $(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif et non intègre (si $n \geqslant 2$), formule du binôme de Newton, factorisation (de $A^p - B^p$) lorsque les matrices mises en jeu commutent
- les ensembles $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par produit
- notion de matrice (carrée) inversible, groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^\times$ (groupe des inversibles de l'anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$), rappel des propriétés de l'inverse : unicité en cas d'existence, inversibilité et inverse de A^{-1}, AB, A^k ($k \in \mathbb{N}$) et A^{T} si A et B le sont
- déterminant d'une matrice de taille 2×2, description de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$
- système linéaire, système homogène associé, système compatible, ensemble des solutions du système
- dans le plan, l'ensemble des solutions d'un système à n équations et 2 inconnues correspond géométriquement aux points d'intersections de droites (analogie pour des plans dans l'espace)

Questions de cours

- Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a :
$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$
- On suppose que f est dérivable et convexe sur l'intervalle I. Montrer que la fonction f' est croissante sur I.
- Soit f une fonction convexe et dérivable sur I. Alors :
$$\forall a, x \in I, \qquad f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$
- Le produit matriciel est associatif.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**