

PROGRAMME DE COLLE 16

Chapitre 17 : Polynômes

L'ensemble $\mathbb{K}$ désigne indifféremment l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ (suite presque nulle de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, notation $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, addition dans $\mathbb{K}[X]$, multiplication par un scalaire
- unicité des coefficients d'un polynôme
- degré d'un polynôme, ensemble $\mathbb{K}_d[X]$, coefficient dominant, $\deg(\lambda P)$ (pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$), inégalité $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$ (avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$)
- produit de deux polynômes, degré d'un produit
- $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif, formule du binôme de Newton, factorisation de $P^n - Q^n$, intégrité de $\mathbb{K}[X]$, les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls
- composition de deux polynômes, degré de $P \circ Q$ si Q n'est pas un polynôme constant
- notion de diviseur et de multiple dans $\mathbb{K}[X]$, polynômes associés :

$$\forall A, B \in \mathbb{K}[X], \quad (A \mid B \text{ et } B \mid A) \iff (\exists \lambda \in \mathbb{K}^*, A = \lambda B)$$

- la relation $\mid$ est réflexive et transitive et est compatible avec la relation $\leq$ sur les degrés au sens suivant :

$$\forall (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}), \quad A \mid B \implies \deg(A) \leq \deg(B)$$

- théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$
- PGCD de deux polynômes, deux PGCD de A et B sont associés, le PGCD de A et B (noté $A \wedge B$) est le polynôme unitaire de degré maximal divisant A et B
- relation de Bézout, théorème de Bézout (critère de primalité), lemme de Gauss
- PPCM de deux polynômes
- PGCD d'une famille finie de polynômes, relation de Bézout, polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, polynômes deux à deux premiers entre eux, si $A_1, \dots, A_n$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux qui divisent P , alors $A_1 \dots A_n$ divise P
- fonction polynomiale associée à un polynôme, méthode de Horner (lien avec Python : évaluation polynomiale et complexité temporelle)
- racine d'un polynôme, $a \in \mathbb{K}$ est racine de P si et seulement si $X - a \mid P$
- si P est de degré $d \in \mathbb{N}$, alors P a au plus d racines, si $P \in \mathbb{K}_d[X]$ et si P admet au moins $d + 1$ racines, alors $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$
- identification d'un polynôme et de sa fonction polynomiale associée
- multiplicité $m_P(a)$ d'une racine a , un polynôme P est scindé sur $\mathbb{K}$ si $\deg(P) = \sum_{a \in \text{Rac}_{\mathbb{K}}(P)} m_P(a)$

(définition), P est scindé sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = C_P \prod_{a \in \text{Rac}_{\mathbb{K}}(P)} (X - a)^{m_P(a)}$ (où $C_P \in \mathbb{K}^*$ est le coefficient dominant de P)

- relations coefficients/racines (formules de Viète)

- dérivation formelle d'un polynôme, degré de P' , de $P^{(n)}$, formules relatives à $(P+Q)^{(n)}$, $(PQ)^{(n)}$ (formule de Leibniz), $(P \circ Q)'$, formule de Taylor polynomiale (en 0 et en $a \in \mathbb{K}$), reformulation de la notion de multiplicité à l'aide des dérivées successives
- polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$
- théorème de D'Alembert-Gauss

Questions de cours

- Énoncer et démontrer le théorème de Bézout (dans $\mathbb{K}[X]$).
- Énoncer et démontrer le lemme de Gauss (dans $\mathbb{K}[X]$).
- Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$a \text{ est racine de } P \iff X - a \text{ divise } P$$

- Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si A et B divisent C et si A et B sont premiers entre eux, alors AB divise C .
- Pour un polynôme de degré 3 scindé sur $\mathbb{K}$, énoncer et retrouver les formules de Viète.
- **Exercice** : déterminer l'ensemble $\mathcal{E} = \{(U, V) \in (\mathbb{R}[X])^2 \mid (X^3 - 1)U + (X^2 + 1)V = 2X\}$.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- Nous n'avons pas encore abordé (dans le cours) la notion de polynôme irréductible sur $\mathbb{K}$ et la décomposition d'un polynôme non constant en produit de polynômes irréductibles.