

PROGRAMME DE COLLE 15

Chapitre 16 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

- notions de matrices à n lignes et p colonnes (ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), matrice nulle $0_{n,p}$, matrice colonne, matrice ligne, matrice carrée (notations $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, 0_n), matrice identité I_n , matrice scalaire, matrice diagonale, triangulaire supérieure/inférieure (ensembles $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$)
- somme de deux matrices de même taille, multiplication d'une matrice par un scalaire, notion de combinaison linéaire de matrices de mêmes tailles
- matrice élémentaire $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, symbole de Kronecker et égalité $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1 \leq k \leq n, \\ 1 \leq \ell \leq p}}$, tout élément de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ se décompose comme combinaison linéaire de matrices élémentaires
- produit matriciel de deux matrices de tailles compatibles, associativité du produit matriciel, bilinéarité, la matrice identité est l'élément neutre pour la multiplication matricielle
- si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, alors $AX = \sum_{k=1}^p x_k C_k$ où $C_1, \dots, C_p$ sont les colonnes de A (et $x_1, \dots, x_p$ les composantes de X), résultat analogue pour YA , où Y est une matrice ligne
- transposée de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notation A^T , linéarité de la transposition, $(A^T)^T$, transposée d'un produit
- matrice carrée symétrique, antisymétrique (ensembles $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$)
- $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau non commutatif et non intègre (si $n \geq 2$), formule du binôme de Newton, factorisation (de $A^p - B^p$) lorsque les matrices mises en jeu commutent
- les ensembles $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par produit
- notion de matrice (carrée) inversible, groupe linéaire $\text{GL}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^\times$ (groupe des inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$), rappel des propriétés de l'inverse : inversibilité et inverse de A^{-1} , AB , A^k ($k \in \mathbb{N}$) et A^T si A et B le sont
- déterminant d'une matrice de taille 2×2 , description de $\text{GL}_2(\mathbb{K})$
- système linéaire, système homogène associé, système compatible, ensemble des solutions du système
- dans le plan, l'ensemble des solutions d'un système à n équations et 2 inconnues correspond géométriquement aux points d'intersections de droites (analogie pour des plans dans l'espace)
- opérations élémentaires (échange de deux lignes $L_i \leftrightarrow L_j$, multiplication d'une ligne par un scalaire non nul $L_i \leftarrow \lambda L_i$, ajout d'une ligne à une autre $L_i \leftarrow L_i + L_j$)
- notion de système linéaire échelonné, résolution d'un tel système (inconnues principales et secondaires, équations de compatibilité), description de la méthode du pivot de Gauss
- interprétation matricielle ($AX = B$) d'un système linéaire, l'ensemble des solutions de ce système est :

$$\{X_0 + X_H \mid X_H \text{ solution du système homogène associé}\},$$

le système homogène étant $AX = 0_{n,1}$, et où X_0 est une solution particulière du système $AX = B$

- système de Cramer, une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si, pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un système de Cramer
- une matrice triangulaire est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et, si $A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est une matrice diagonale inversible, alors :

$$A^{-1} = \text{diag}(\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1})$$

- interprétation matricielle des opérations élémentaires (matrices de dilatation, de transvection, de permutation)

Questions de cours

- Associativité du produit matriciel : énoncé et démonstration.
- L'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (des matrices triangulaires supérieures) est stable par produit.
- Une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et, dans ce cas, on a $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- Soient $i, j, k, \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$.
- Déterminer les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**