

PROGRAMME DE COLLE 14

Chapitre 15 : Fonctions convexes

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et $f \in \mathbb{R}^I$ est une fonction définie sur I et à valeurs réelles.

- notion de fonction convexe/concave sur I
- la fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tous x_1, x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, la courbe représentative de $f|_{[x_1, x_2]}$ est en-dessous de la corde joignant les points de la courbe de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$
- inégalité de convexité (ou de Jensen) : si f est convexe sur I , alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 1$ et pour tous $x_1, \dots, x_p \in I$, on a l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i f(x_i)$$

- convexité et croissance des pentes : la fonction f est convexe sur I si et seulement pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

- si f est dérivable sur l'intervalle I , alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I si f est deux fois dérivable sur I)
- position de la courbe d'une fonction convexe dérivable par rapport aux tangentes : si f est une fonction dérivable et convexe sur I , alors

$$\forall a, x \in I, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

- inégalités de convexité classiques :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq 1 + x), \quad \text{et} \quad (\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1 + x) \leq x)$$

Questions de cours

- Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction convexe. Alors pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a :

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}$$

- On suppose que f est dérivable et convexe sur l'intervalle I . Alors la fonction f' est croissante sur I .
- Soit f une fonction convexe et dérivable sur I . Alors :

$$\forall a, x \in I, \quad f(x) \geq f'(a)(x - a) + f(a)$$

- **Exercice.** Soient $f, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ deux fonctions convexes, g étant de plus supposée croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $g \circ f$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- **Exercice.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad (\text{inégalité arithmético-géométrique})$$

- **Exercice.** Soit $f \in (\mathbb{R}_+^*)^I$. On suppose que la fonction $\ln \circ f$ est convexe sur I . Montrer que la fonction f est convexe sur I .

Remarques aux colleurs

- Merci d'être très exigeants sur la rédaction.