Programme de Colle 14

Chapitre 14 : Limites et continuité

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction à valeurs réelles et définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point et a est un élément de $\overline{I}$ (sauf mention contraire).

- notion de voisinage d'un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ ($[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $]-\infty, A]$, $[A, +\infty[$), ensemble des voisinages $\mathscr{V}(a)$
- notion de propriété vraie au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ pour une fonction
- notations $\overline{I}$ et $\mathring{I}$
- limite d'une fonction en un point de $\overline{I}$, égale à un élément de $\overline{\mathbb{R}}$: on dit que f admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{I}$ si :
$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists W \in \mathscr{V}(a),\ f(W \cap I) \subset V,$$
écriture des neuf définitions possibles, notations $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
- si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique
- si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a
- si $a \in I$ et si f admet une limite en a, alors celle-ci est égale à $f(a)$
- $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$
- si g est bornée au voisinage de a et si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
- limite à gauche et limite à droite en un point, lien avec la notion de limite
- théorème de la limite monotone
- caractérisation séquentielle de la limite
- opérations sur les limites, théorème de composition des limites
- passage à la limite dans des inégalités, théorème de comparaison, théorème des gendarmes
- continuité d'une fonction en un point, prolongement par continuité d'une fonction en un point
- continuité à droite, continuité à gauche, lien avec la continuité
- caractérisation séquentielle de la continuité
- continuité et opérations (notamment la composition)
- continuité sur un intervalle, notation $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, cet ensemble (muni de l'addition et de la multiplication des fonctions) a une structure d'anneau commutatif
- continuité des fonctions usuelles
- théorème des valeurs intermédiaires (démonstration en utilisant le principe de dichotomie), image d'un intervalle par une fonction continue
- théorème des bornes atteintes
- continuité et monotonie stricte (*résultats admis*) :
  — si f est continue sur I, alors f est injective sur I si et seulement si elle est strictement monotone sur I
  — théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur l'intervalle $f(I)$
- extension des notions de limite et de continuité aux fonctions à valeurs complexes et des propriétés algébriques, lien avec les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$

Questions de cours

- Soient $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \overline{I}$. Si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a.
- Théorème de composition des limites : énoncé et démonstration
- Chapitre sur la dérivation : si $f, g \in \mathbb{R}^I$ sont des fonctions dérivables sur l'intervalle I, alors la fonction $f \times g$ est dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**