Programme de Colle 13

Chapitre 14 : Dérivabilité (exercices)

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $f \in \mathbb{R}^I$ est une fonction.

- taux d'accroissement d'une fonction en un point a de I, dérivabilité de f en a, nombre dérivé $f'(a)$ de f en a :
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a (*la réciproque est fausse*)
- dérivabilité et développement limité à l'ordre 1 : la fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon \in \mathbb{R}^I$ et un nombre réel λ tels que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et :
$$\forall x \in I, \qquad f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$
et, dans ce cas, $\lambda = f'(a)$
- dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite de f en un point a de I, nombres dérivés à gauche et à droite $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$, lien avec la dérivabilité en a
- fonction dérivable sur un intervalle (ensemble $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$), fonction dérivée, domaine de dérivabilité
- dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée
- dérivabilité et dérivée d'une fonction réciproque : si $f : I \longrightarrow J$ est une fonction bijective, dérivable sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$
- domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles
- notions d'extremum local et de point critique, si f présente un extremum local en un point a de $\mathring{I}$, alors a est un point critique de f (*et la réciproque est fausse*)
- lemme de Rolle et théorème des accroissements finis
- notion de fonction lipschitzienne, interprétation géométrique, toute fonction lipschitzienne est continue, inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par $M > 0$ sur I, alors f est M-lipschitzienne sur I
- étude *rapide* de suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec une fonction lipschitzienne f de constante de Lipschitz $M \in]0, 1[$
- caractérisation de la croissance : si $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$, alors f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I, caractérisation de la décroissance (et du caractère constant)
- caractérisation de la croissance stricte : si $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$, alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I et $\big\{x \in I \,\big|\, f'(x) = 0\big\}$ est d'intérieur vide, résultat analogue pour la décroissance stricte
- théorème de la limite de la dérivée : si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{R}) \cap \mathscr{D}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et si $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (de plus, f' est continue en a)
- pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, notion de fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I (ensemble associé $\mathscr{C}^k(I, \mathbb{R})$), opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition et réciproque
- extension des notions de dérivabilité et de dérivée pour les fonctions $f \in \mathbb{C}^I$ à valeurs complexes : même définition pour la dérivabilité locale, caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire
- inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes et de classe $\mathscr{C}^1$

Chapitre 15 : Fonctions convexes (cours)

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $f \in \mathbb{R}^I$ est une fonction.

- notion de fonction convexe/concave sur I
- la fonction f est convexe sur I si et seulement si, pour tous x_1, x_2 de I tels que $x_1 < x_2$, la courbe représentative de $f|_{[x_1,x_2]}$ est en-dessous de la corde joignant les points de la courbe de coordonnées $(x_1, f(x_1))$ et $(x_2, f(x_2))$
- inégalité de convexité (ou de Jensen) : si f est convexe sur I, alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$ et pour tous $x_1, \ldots, x_p \in I$, on a l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f(x_i)$$

- convexité et croissance des pentes : la fonction f est convexe sur I si et seulement pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

- si f est dérivable sur l'intervalle I, alors f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I (si et seulement si $f'' \geqslant 0$ sur I si f est deux fois dérivable sur I)
- position de la courbe d'une fonction convexe dérivable par rapport aux tangentes : si f est une fonction dérivable et convexe sur I, alors

$$\forall a, x \in I, \qquad f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

- inégalités de convexité classiques :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x \geqslant 1 + x), \qquad \text{et} \qquad (\forall x \in]-1, +\infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x)$$

Questions de cours

- Soit $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$. Alors f est croissante sur I si et seulement si $f' \geqslant 0$ sur I.
- Soit $f \in \mathbb{R}^I$ une fonction convexe. Alors pour tous $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$, on a :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

- On suppose que f est dérivable et convexe sur l'intervalle I. Alors la fonction f' est croissante sur I.
- Soit f une fonction convexe et dérivable sur I. Alors :

$$\forall a, x \in I, \qquad f(x) \geqslant f'(a)(x-a) + f(a)$$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**