

PROGRAMME DE COLLE 13

Chapitre 14 : Dérivabilité

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $f \in \mathbb{R}^I$ est une fonction.

- taux d'accroissement d'une fonction en un point a de I , dérivabilité de f en a , nombre dérivé $f'(a)$ de f en a :

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a (la réciproque est fausse)
- dérivabilité et développement limité à l'ordre 1 : la fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon \in \mathbb{R}^I$ et un nombre réel λ tels que $\varepsilon(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$ et :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$

et, dans ce cas, $\lambda = f'(a)$

- dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite de f en un point a de I , nombres dérivés à gauche et à droite $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$, lien avec la dérivabilité en a
- fonction dérivable sur un intervalle (ensemble $\mathcal{D}(I, \mathbb{R})$), fonction dérivée, domaine de dérivabilité
- dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée
- dérivabilité et dérivée d'une fonction réciproque : si $f : I \rightarrow J$ est une fonction bijective, dérivable sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I , alors f^{-1} est dérivable sur J et :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

- domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles
- notions d'extremum local et de point critique, si f présente un extremum local en un point a de I , alors a est un point critique de f (et la réciproque est fausse)
- lemme de Rolle et théorème des accroissements finis
- notion de fonction lipschitzienne, interprétation géométrique, toute fonction lipschitzienne est continue, inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $|f'|$ est majorée par $M > 0$ sur I , alors f est M -lipschitzienne sur I
- étude *rapide* de suites définies par une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$, avec une fonction lipschitzienne f de constante de Lipschitz $M \in]0, 1[$
- caractérisation de la croissance : si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, alors f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I , caractérisation de la décroissance (et du caractère constant)
- caractérisation de la croissance stricte : si $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, alors f est strictement croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I et $\{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ est d'intérieur vide, résultat analogue pour la décroissance stricte
- théorème de la limite de la dérivée : si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \cap \mathcal{D}(I \setminus \{a\}, \mathbb{R})$ et si $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$ (de plus, f' est continue en a)
- pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, notion de fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur I (ensemble associé $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$), opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition et réciproque

- extension des notions de dérivabilité et de dérivée pour les fonctions $f \in \mathbb{C}^I$ à valeurs complexes : même définition pour la dérivabilité locale, caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire
- inégalité des accroissements finis pour une fonction à valeurs complexes et de classe $\mathcal{C}^1$

Questions de cours

- Soient $f, g \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$, la fonction g ne s'annulant pas sur I . Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

- Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides, $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathcal{D}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
- Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \overset{\circ}{I}$. Si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a , alors $f'(a) = 0$.
- Soit $f \in \mathcal{D}(I, \mathbb{R})$. Alors f est croissante sur I si et seulement si $f' \geq 0$ sur I .
- Énoncé et démonstration du théorème sur la limite de la dérivée
- **Exercice.** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{x}{x^2 + 1} \leq \text{Arctan}(x) \leq x$$

Remarques aux colleurs

- Merci d'être très exigeants sur la rédaction.