

PROGRAMME DE COLLE 12

Chapitre 13 : Limites et continuité

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction à valeurs réelles et définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point et a est un élément de $\bar{I}$ (sauf mention contraire).

- notion de voisinage d'un point a de $\bar{\mathbb{R}}$ ($[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$, $]-\infty, A]$, $[A, +\infty[$), ensemble des voisinages $\mathcal{V}(a)$
- notion de propriété vraie au voisinage d'un point de $\bar{\mathbb{R}}$ pour une fonction
- notations $\bar{I}$ et $\overset{\circ}{I}$
- limite d'une fonction en un point de $\bar{I}$, égale à un élément de $\bar{\mathbb{R}}$: on dit que f admet pour limite $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$ en $a \in \bar{I}$ si :

$$\forall V \in \mathcal{V}(\ell), \exists W \in \mathcal{V}(a), f(W \cap I) \subset V,$$

écriture des neuf définitions possibles, notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$

- si f admet une limite en a , alors celle-ci est unique
- si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a
- si $a \in I$ et si f admet une limite en a , alors celle-ci est égale à $f(a)$
- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
- si g est bornée au voisinage de a et si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$
- limite à gauche et limite à droite en un point, lien avec la notion de limite
- théorème de la limite monotone
- caractérisation séquentielle de la limite
- opérations sur les limites, théorème de composition des limites
- passage à la limite dans des inégalités, théorème de comparaison, théorème des gendarmes
- continuité d'une fonction en un point, prolongement par continuité d'une fonction en un point
- continuité à droite, continuité à gauche, lien avec la continuité
- caractérisation séquentielle de la continuité
- continuité et opérations (notamment la composition)
- continuité sur un intervalle, notation $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$, cet ensemble (muni de l'addition et de la multiplication des fonctions) a une structure d'anneau commutatif
- continuité des fonctions usuelles
- théorème des valeurs intermédiaires (démonstration en utilisant le principe de dichotomie), image d'un intervalle par une fonction continue
- théorème des bornes atteintes
- continuité et monotonie stricte (*résultats admis*) :
 - si f est continue sur I , alors f est injective sur I si et seulement si elle est strictement monotone sur I
 - théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur l'intervalle $f(I)$
- extension des notions de limite et de continuité aux fonctions à valeurs complexes et des propriétés algébriques, lien avec les fonctions $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$

Questions de cours

- Énoncé et démonstration de la caractérisation séquentielle de la limite (démonstration dans le cas d'une limite en un point de $\mathbb{R}$ et avec une limite finie).
- *Théorème de composition des limites*
Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $g \in \mathbb{R}^J$ telles que $f(I) \subset J$. Soient encore $a \in \bar{I}$, $b \in \bar{J}$ et $\ell \in \bar{\mathbb{R}}$. On suppose que :

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} b \quad \text{et} \quad g(t) \xrightarrow{t \rightarrow b} \ell$$

Alors $g(f(x)) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$ (*démonstration dans le cas $a \in I$, $b \in J$ et $\ell \in \mathbb{R}$*).

- **Exercice** : soient $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Montrer que $f = g$.
- **Exercice** : montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^x}{[x]^{[x]}}$ n'admet pas de limite en $+\infty$.
- **Exercice** : soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ telle que f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarques aux colleurs

- Merci d'être très exigeants sur la rédaction.