Programme de Colle 12

Chapitre 12 : Suites numériques

- notion de suite numérique, ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ associés, suite réelle majorée, minorée, bornée (reformulation de la bornitude avec la valeur absolue), sens de variation d'une suite, suite stationnaire
- définition de la convergence d'une suite réelle, unicité de la limite d'une suite convergente
- propriétés :
  — toute suite convergente est bornée
  — le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergente de limite 0
  — si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$
  — $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  — si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $|u_n| \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- limite infinie d'une suite
- opérations sur les limites : droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, règles de calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$, limite de $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si u et v admettent une limite (et si on n'est pas dans une situation d'indétermination), limite de $\frac{1}{u_n}$
- positivité de la limite d'une suite convergente et à valeurs positives, ordre des limites de deux suites convergentes u et v telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- théorème d'encadrement (ou des gendarmes), théorème de comparaison (pour les limites infinies)
- notion de suite extraite, propriétés :
  — si u admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ
  — si la suite u admet une suite extraite divergente, alors la suite u est divergente
  — la suite u admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent pour limite ℓ
- théorème de la limite monotone : toute suite croissante et majorée converge, toute suite croissante et non majorée admet pour limite $+\infty$, adaptation pour une suite décroissante
- notion de suite adjacente, deux suites adjacentes sont convergentes de limite commune
- théorème de Bolzano-Weierstrass
- extension des définitions et propriétés pour les suites à valeurs complexes : suite complexe bornée (lien avec la bornitude des suites $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$), convergence d'une suite complexe (lien avec la convergence des suites $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$), généralisation des propriétés algébriques sur les limites, théorème de Bolzano-Weierstrass
- caractérisation séquentielle de la borne supérieure : si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si :
  — M majore A ;
  — $\exists\,(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$
- une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert I non vide de $\mathbb{R}$, on a $I \cap D \neq \varnothing$
- caractérisation séquentielle de la densité
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$
- suites usuelles : suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre deux

- suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (représentation graphique, notion d'intervalle stable, résultats généraux énoncés et à savoir redémontrer dans un exercice : cas d'une fonction f croissante, cas d'une fonction f décroissante avec les suites extraites)

Chapitre 13 : Arithmétique dans $\mathbb{Z}$

Dans ce qui suit, les lettres a, b, c, d, α et β désignent, sauf mention contraire, des entiers relatifs.

- notions de diviseur et de multiple, notation $a \mid b$, l'ensemble des multiples de a est $a\mathbb{Z}$, l'ensemble des diviseurs de b est $\mathscr{D}(b) = \{d \in \mathbb{Z} \mid d \mid b\}$
- dans $\mathbb{Z}$, $a \mid b$ et $b \mid a$ si et seulement si $|a| = |b|$; la relation $\mid$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$
- si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid \alpha a + \beta b$
- si $d \in \mathbb{Z}^*$, alors $a \mid b$ si et seulement si $ad \mid bd$
- théorème de la division euclidienne (application : les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les ensembles de la forme $n\mathbb{Z}$ où $n \in \mathbb{N}$)
- plus grand diviseur commun (PGCD) de deux entiers relatifs a et b, notation $a \wedge b$ (si $a = b = 0$, alors $a \wedge b = 0$ et, sinon, $a \wedge b = \max(\mathscr{D}(a) \cap \mathscr{D}(b)) \in \mathbb{N}^*$)
- algorithme d'Euclide, algorithme d'Euclide étendu pour la détermination pratique du PGCD, les diviseurs communs à a et à b sont les diviseurs de $a \wedge b$
- si $k \in \mathbb{N}^*$, alors $(ka) \wedge (kb) = k(a \wedge b)$
- relation de Bézout :
$$\exists\, u, v \in \mathbb{Z}, \qquad au + bv = a \wedge b,$$
on obtient le couple de coefficients de Bézout (u, v) par l'algorithme d'Euclide *étendu*
- entiers premiers entre eux, théorème de Bézout :
$$a \wedge b = 1 \iff (\exists\, u, v \in \mathbb{Z},\ au + bv = 1)$$
- si $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, alors les entiers $\dfrac{a}{a \wedge b}$ et $\dfrac{b}{a \wedge b}$ sont premiers entre eux, application : tout nombre rationnel peut-être mis sous *une* forme irréductible
- si $a \wedge c = 1$ et $b \wedge c = 1$, alors $ab \wedge c = 1$
- lemme de Gauss : si $a \wedge b = 1$ et si $a \mid bc$, alors $a \mid c$, applications :
  — pour tout $r \in \mathbb{Q}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $a \wedge b = 1$ et $r = \frac{a}{b}$ (unicité de la forme irréductible d'un nombre rationnel)
  — résolution d'équations diophantiennes $ax + by = c$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$
- si a et b sont premiers entre eux et si a et b divisent c, alors ab divise c
- plus petit multiple commun (PPCM) de deux entiers relatifs a et b, notation $a \vee b$ (si $a = b = 0$, alors $a \vee b = 0$ et, sinon, $a \vee b = \min(a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z} \cap \mathbb{N}^*)$)

Questions de cours

- Théorème de la limite monotone (cas d'une suite majorée) : énoncé et démonstration
- Deux suites adjacentes sont convergentes de même limite.
- Théorème de la division euclidienne : énoncé et démonstration
- Description des sous-groupes de $\mathbb{Z}$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- La caractérisation séquentielle de la limite sera traitée dans un chapitre ultérieur.
- Pour une suite arithmético-géométrique, le programme de MPSI suggère la méthode consistant à trouver le point fixe de la relation.