Programme de Colle 12

Chapitre 13 : Limites et continuité (exercices)

Dans tout ce qui suit, f désigne une fonction à valeurs réelles et définie sur un intervalle I non vide et non réduit à un point et a est un élément de $\overline{I}$ (sauf mention contraire).

- notion de voisinage d'un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ ($[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, $]-\infty, A]$, $[A, +\infty[$), ensemble des voisinages $\mathscr{V}(a)$
- notion de propriété vraie au voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$ pour une fonction
- notations $\overline{I}$ et $\overset{\circ}{I}$
- limite d'une fonction en un point de $\overline{I}$, égale à un élément de $\overline{\mathbb{R}}$: on dit que f admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $a \in \overline{I}$ si :
$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists W \in \mathscr{V}(a),\ f(W \cap I) \subset V,$$
écriture des neuf définitions possibles, notations $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$
- si f admet une limite en a, alors celle-ci est unique
- si f admet une limite finie en a, alors f est bornée au voisinage de a
- si $a \in I$ et si f admet une limite en a, alors celle-ci est égale à $f(a)$
- $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff |f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} 0$
- si g est bornée au voisinage de a et si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$, alors $f(x)g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$
- limite à gauche et limite à droite en un point, lien avec la notion de limite
- théorème de la limite monotone
- caractérisation séquentielle de la limite
- opérations sur les limites, théorème de composition des limites
- passage à la limite dans des inégalités, théorème de comparaison, théorème des gendarmes
- continuité d'une fonction en un point, prolongement par continuité d'une fonction en un point
- continuité à droite, continuité à gauche, lien avec la continuité
- caractérisation séquentielle de la continuité
- continuité et opérations (notamment la composition)
- continuité sur un intervalle, notation $\mathscr{C}(I, \mathbb{R})$, cet ensemble (muni de l'addition et de la multiplication des fonctions) a une structure d'anneau commutatif
- continuité des fonctions usuelles
- théorème des valeurs intermédiaires (démonstration en utilisant le principe de dichotomie), image d'un intervalle par une fonction continue
- théorème des bornes atteintes
- continuité et monotonie stricte (*résultats admis*) :
  - — si f est continue sur I, alors f est injective sur I si et seulement si elle est strictement monotone sur I
  - — théorème de la bijection : si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ et f^{-1} est continue et strictement monotone (de même monotonie que f) sur l'intervalle $f(I)$
- extension des notions de limite et de continuité aux fonctions à valeurs complexes et des propriétés algébriques, lien avec les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$

Chapitre 14 : Dérivabilité (cours)

Dans tout ce qui suit, I désigne un intervalle non vide et non réduit à un point et $f \in \mathbb{R}^I$ est une fonction.

- taux d'accroissement d'une fonction en un point a de I, dérivabilité de f en a, nombre dérivé $f'(a)$ de f en a :
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$
- si f est dérivable en $a \in I$, alors f est continue en a (*la réciproque est fausse*)
- dérivabilité et développement limité à l'ordre 1 : la fonction f est dérivable en a si et seulement s'il existe une fonction $\varepsilon \in \mathbb{R}^I$ et un nombre réel λ tels que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et :
$$\forall x \in I, \qquad f(x) = f(a) + \lambda(x - a) + (x - a)\varepsilon(x)$$
et, dans ce cas, $\lambda = f'(a)$
- dérivabilité à gauche, dérivabilité à droite de f en un point a de I, nombres dérivés à gauche et à droite $f'_g(a)$ et $f'_d(a)$, lien avec la dérivabilité en a
- fonction dérivable sur un intervalle (ensemble $\mathscr{D}(I, \mathbb{R})$), fonction dérivée
- dérivabilité et dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une fonction composée
- dérivabilité et dérivée d'une fonction réciproque : si $f : I \longrightarrow J$ est une fonction bijective, dérivable sur I et telle que f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et :
$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$
- domaine de dérivabilité et dérivée des fonctions usuelles
- notions d'extremum local et de point critique, si f présente un extremum local en un point a de $\mathring{I}$, alors a est un point critique de f (*et la réciproque est fausse*)
- lemme de Rolle et théorème des accroissements finis

Questions de cours

- Énoncé et démonstration de la caractérisation séquentielle de la limite (démonstration dans le cas d'une limite en un point de $\mathbb{R}$ et avec une limite finie).
- Soient $f, g \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$, la fonction g ne s'annulant pas sur I. Alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- Soient I et J deux intervalles d'intérieurs non vides, $f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{D}(J, \mathbb{R})$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f \in \mathscr{D}(I, \mathbb{R})$ et $(g \circ f)' = f' \times (g' \circ f)$.
- Soient $f \in \mathbb{R}^I$ et $a \in \mathring{I}$. Si f est dérivable en a et si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**