Programme de Colle 11

Chapitre 12 : Suites numériques

- notion de suite numérique, ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ associés, suite réelle majorée, minorée, bornée (reformulation de la bornitude avec la valeur absolue), sens de variation d'une suite, suite stationnaire
- définition de la convergence d'une suite réelle, unicité de la limite d'une suite convergente
- propriétés :
  — toute suite convergente est bornée
  — le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergente de limite 0
  — si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |\ell|$
  — $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff |u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
  — si $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $|u_n| \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
- limite infinie d'une suite
- opérations sur les limites : droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, règles de calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$, limite de $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si u et v admettent une limite (et si on n'est pas dans une situation d'indétermination), limite de $\frac{1}{u_n}$
- positivité de la limite d'une suite convergente et à valeurs positives, ordre des limites de deux suites convergentes u et v telles que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- théorème d'encadrement (ou des gendarmes), théorème de comparaison (pour les limites infinies)
- notion de suite extraite, propriétés :
  — si u admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ
  — si la suite u admet une suite extraite divergente, alors la suite u est divergente
  — la suite u admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ admettent pour limite ℓ
- théorème de la limite monotone : toute suite croissante et majorée converge, toute suite croissante et non majorée admet pour limite $+\infty$, adaptation pour une suite décroissante
- notion de suite adjacente, deux suites adjacentes sont convergentes de limite commune
- théorème de Bolzano-Weierstrass
- extension des définitions et propriétés pour les suites à valeurs complexes : suite complexe bornée (lien avec la bornitude des suites $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$), convergence d'une suite complexe (lien avec la convergence des suites $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$), généralisation des propriétés algébriques sur les limites, théorème de Bolzano-Weierstrass
- caractérisation séquentielle de la borne supérieure : si A est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, alors $M \in \mathbb{R}$ est la borne supérieure de A si et seulement si :
  — M majore A ;
  — $\exists\, (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} M$
- une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert I non vide de $\mathbb{R}$, on a $I \cap D \neq \varnothing$
- caractérisation séquentielle de la densité
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$

Questions de cours

- En cas d'existence, la limite d'une suite convergente est unique.
- Toute suite convergente est bornée.
- Si $u, v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites convergentes de limites respectives $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors la suite $u \times v$ est convergente de limite $\ell\ell'$.
- Théorème des gendarmes

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- La caractérisation séquentielle de la limite sera traitée dans un chapitre ultérieur.
- Les suites usuelles, ainsi que les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ n'ont pas encore été traitées.