Programme de Colle 10

Chapitre 11 : Groupes, anneaux et corps

Soit E un ensemble non vide.

- loi de composition interne $*$ sur E (le couple $(E,*)$ est appelé *magma*)
- propriétés remarquables de la loi $*$: associativité, commutativité, existence d'un élément neutre (et unicité en cas d'existence), notion d'élément inversible (et unicité de l'inverse dans un magma associatif admettant un élément neutre en cas d'existence, notation générale x^{-1}, notation $-x$ dans un groupe additif), inverse de x^{-1}, inverse de $x * y$ si x et y sont inversibles, tout élément inversible est régulier
- structure de groupe, notion de groupe abélien (ou commutatif), exemples fondamentaux :
  - groupes additifs $(\mathbb{Z},+)$, $(\mathbb{Q},+)$, $(\mathbb{R},+)$, $(\mathbb{C},+)$
  - groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^*,\times)$, $(\mathbb{Q}^*,\times)$, $(\mathbb{C}^*,\times)$, $(\mathbb{R}_+^*,\times)$, $(\mathbb{Q}_+^*,\times)$, $(\mathbb{U},\times)$, $(\mathbb{U}_n,\times)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
  - groupe des permutations $(S_X,\circ)$ d'un ensemble X non vide
- notion de puissances x^n ($n \in \mathbb{Z}$) dans un groupe, propriétés relatives à x^{m+n}, $x^n y^m$ et $(xy)^n$ si x et y commutent, notation nx dans un groupe additif
- produit de groupes
- notion de sous-groupe, caractérisation, tout sous-groupe d'un groupe est un groupe, intersection de sous-groupes
- morphisme de groupes $f : G \longrightarrow H$, propriétés : $f(e_G) = e_H$, $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$ et $f(x^n) = f(x)^n$ pour tout $x \in G$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, notions d'isomorphisme de groupes
- si G' est un sous-groupe de G, alors l'image directe $f(G')$ est un sous-groupe de H et, si H' est un sous-groupe de H, alors l'image réciproque $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G
- noyau d'un morphisme de groupes : le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ de f est un sous-groupe de G, et f est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$
- image d'un morphisme de groupes : l'image $\mathrm{Im}(f)$ de f est un sous-groupe de H et f est surjectif si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = H$
- structure d'anneau, exemples fondamentaux $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ pour l'addition et la multiplication usuelles, $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}},+,\times)$, notion d'anneau intègre
- notion d'élément inversible (pour la multiplication) dans un anneau, groupe $A^\times$ des éléments inversibles de A (pour $\times$)
- sous-anneau d'un anneau, tout sous-anneau d'un anneau est un anneau
- structure de corps (un corps est commutatif)
- calculs dans un anneau : factorisation de $a^n - b^n$ et développement de $(a+b)^n$ (formule du binôme de Newton) si a et b commutent
- morphisme d'anneaux, isomorphisme d'anneaux, noyau et image d'un morphisme d'anneaux, caractérisation de l'injectivité avec le noyau, caractérisation de la surjectivité avec l'image

Questions de cours

- **Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.**
- Si $(G,*)$ est un groupe et si H et K sont des sous-groupes de G, alors $H \cap K$ est un sous-groupe de G.

- Soient $(G,*)$, $(H,\triangle)$ deux groupes, $f:(G,*)\longrightarrow(H,\triangle)$ un morphisme de groupes et G' un sous-groupe de G. Alors $f(G')$ est un sous-groupe de H.
- Un morphisme de groupes $f:(G,*)\longrightarrow(H,\triangle)$ est injectif si et seulement si $\mathrm{Ker}(f)=\{e_G\}$.
- Soient A un anneau et $a,b\in A$ tels que $ab=ba$. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n-b^n=(a-b)\sum_{k=0}^{n-1}a^kb^{n-1-k}$$

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**