

PROGRAMME DE COLLE 10

Chapitre 11 : Suites numériques

- notion de suite numérique, ensembles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ associés, suite réelle majorée, minorée, bornée (reformulation de la bornitude avec la valeur absolue), sens de variation d'une suite, suite stationnaire
- définition de la convergence d'une suite réelle, unicité de la limite d'une suite convergente
- propriétés :
 - toute suite convergente est bornée
 - le produit d'une suite convergeant vers 0 et d'une suite bornée est une suite convergente de limite 0
 - si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$, alors $|u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |\ell|$
 - $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff |u_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 - si $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et si $|u_n| \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
- limite infinie d'une suite
- opérations sur les limites : droite numérique achevée $\overline{\mathbb{R}}$, règles de calculs dans $\overline{\mathbb{R}}$, limite de $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $(\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ si u et v admettent une limite (et si on n'est pas dans une situation d'indétermination), limite de $\frac{1}{u_n}$
- positivité de la limite d'une suite convergente et à valeurs positives, ordre des limites de deux suites convergentes u et v telles que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- théorème d'encadrement (ou des gendarmes), théorème de comparaison (pour les limites infinies)
- notion de suite extraite, propriétés :
 - si u admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraite $(u_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ admet pour limite ℓ
 - si la suite u admet une suite extraite qui n'admet pas de limite, alors la suite u n'admet pas de limite
 - si la suite u admet deux suites extraites qui ont des limites différentes, alors la suite u n'admet pas de limite
 - la suite u admet pour limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ admettent pour limite ℓ
- théorème de la limite monotone : toute suite croissante et majorée converge, toute suite croissante et non majorée admet pour limite $+\infty$, adaptation pour une suite décroissante
- notion de suite adjacente, deux suites adjacentes sont convergentes de limite commune
- théorème de Bolzano-Weierstrass
- extension des définitions et propriétés pour les suites à valeurs complexes : suite complexe bornée (lien avec la bornitude des suites $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$), convergence d'une suite complexe (lien avec la convergence des suites $(\operatorname{Re}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(z_n))_{n \in \mathbb{N}}$), généralisation des propriétés algébriques sur les limites, théorème de Bolzano-Weierstrass
- caractérisation séquentielle de la borne supérieure : si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et si $M \in \mathbb{R}$, alors M est la borne supérieure de A si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées :
 - M majore A ;
 - $\exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}, a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} M$
- si A est une partie non vide et non majorée de $\mathbb{R}$, alors il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$

- une partie D de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si pour tout intervalle ouvert I non vide de $\mathbb{R}$, on a $I \cap D \neq \emptyset$
- caractérisation séquentielle de la densité
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$
- suites usuelles : suite arithmétique, géométrique, arithmético-géométrique et récurrente linéaire d'ordre deux
- suite du type $u_{n+1} = f(u_n)$ (représentation graphique, notion d'intervalle stable, résultats généraux énoncés et à savoir redémontrer dans un exercice : cas d'une fonction f croissante, cas d'une fonction f décroissante avec les suites extraites)

Questions de cours

- **Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.**
- **Exercice.** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \sin(k)$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est bornée.

- En cas d'existence, la limite d'une suite réelle convergente est unique.
- Toute suite réelle convergente est bornée.
- Énoncer et démontrer le théorème des gendarmes.
- Toute suite réelle croissante et majorée converge.
- Deux suites adjacentes sont convergentes de même limite.
- **Exercice.** Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.

- **Exercice.** Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge de limite $\ln(2)$.

- **Exercice.** On considère les suites u, v et w définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}, \quad v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n-1}$$

- Montrer que les suites v et w sont adjacentes.
- Que peut-on conclure pour la suite u ?

Remarques aux colleurs

- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.**
- Les élèves doivent savoir écrire sans problème la définition de la limite (cas d'une limite finie ou infinie).
- La caractérisation séquentielle de la limite sera traitée dans un chapitre ultérieur.