

PROGRAMME DE COLLE 1

Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

- introduction rapide des quantificateurs $\forall$, $\exists$ et du symbole $\in$
- ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ (et $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}_+^*$, *etc.*), écriture d'un ensemble *en compréhension*
- ensemble/domaine de définition d'une fonction
- graphe d'une fonction, obtention (sur des exemples) des graphes de $x \mapsto f(x+a)$ et $x \mapsto f(ax)$ à partir de celui de f
- somme de deux fonctions, produit, multiplication par un réel, quotient et composition
- fonction paire/impair, fonction périodique, monotonie d'une fonction sur un intervalle, extremum, fonction majorée/minorée/bornée
- maximum, minimum, extremum d'une fonction
- dérivabilité d'une fonction en un point, dérivabilité sur un ensemble, fonction dérivée, tangente, calcul de limites en utilisant un taux d'accroissement
- dérivée des fonctions usuelles : *formulaire*
- propriétés algébriques (dérivabilité et dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée) : *formulaire*
- dérivation et monotonie sur un intervalle
- dérivées d'ordres supérieurs
- fonctions usuelles (pour chacune d'entre elles, on en précise les propriétés algébriques et analytiques, ainsi que le graphe) :
 - fonction $\ln$, fonctions $\log$ et $\log_2$, inégalité de concavité du logarithme :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x \quad (\text{interprétation géométrique})$$

- fonction exponentielle, inégalité de convexité de l'exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1+x \quad (\text{interprétation géométrique})$$

- fonctions puissances $x \mapsto x^a$ (cas $a \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$), : domaine de définition (on peut prolonger en 0 si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \mathbb{N}$), dérivée et graphe
- croissances comparées
- fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques ch , sh et th (la seule formule de trigonométrie exigible est $\text{ch}^2 - \text{sh}^2 = 1$)

Questions de cours

- Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes/décroissantes sur $\mathbb{R}$. Étudier la monotonie de $g \circ f$ sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x \geq 1+x$$

- Montrer que :

$$\forall x \in]-1, +\infty[, \ln(1+x) \leq x$$

- Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Étude de la fonction th (dérivée, symétrie, tableau de variation, limites et graphe).
- *Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.*
- *Les différentes propriétés d'une fonction usuelle choisie, ainsi que le graphe de celle-ci, peuvent faire l'objet de la question de cours.*

Remarques aux colleurs

- On ne considère que des fonctions à valeurs *réelles* pour l'instant.
- Je n'ai pas insisté sur la *dérivabilité* d'une fonction composée (qui sera abordée ultérieurement). Pour une fonction du type $\sqrt{u}$, on étudie le domaine de définition puis on donne directement le domaine de dérivabilité en ayant en tête que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions circulaires et circulaires réciproques seront traitées ultérieurement.
- Les élèves doivent connaître parfaitement les propriétés relatives aux fonctions usuelles : domaines de définition et de dérivabilité, dérivée, graphe, symétries éventuelles et propriétés algébriques.
- Les élèves doivent savoir rédiger *proprement* une recherche de domaine de définition qui n'est pas évidente (avec résolution d'équation/inéquation).
- Les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection n'ont pas encore été revus en classe.
- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.** *En particulier, toute variable doit être introduite.*

Voici par exemple comment aurait été rédigé en classe la détermination des domaines de définition $\mathcal{D}_f$ et de dérivabilité de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$ donc :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\iff x^2 - 4 \geq 0 \\ &\iff (x - 2)(x + 2) \geq 0 \\ &\iff x \in]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[\quad (\text{par exemple à l'aide d'un tableau de signes}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[}$$

Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est dérivable sur $] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]-\infty, -2[\cup] 2, +\infty[, \quad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$