# Programme de Colle 1

## Chapitre 1 : Généralités sur les fonctions

- introduction rapide des quantificateurs $\forall$, $\exists$ et du symbole $\in$
- ensemble de définition d'une fonction
- graphe d'une fonction, obtention des graphes de $x \longmapsto f(-x)$, $x \longmapsto f(x+a)$ et $x \longmapsto f(ax)$ à partir de celui de $f$
- somme de deux fonctions, produit, multiplication par un réel, quotient et composition
- fonction paire/impaire, fonction périodique, monotonie et lien avec la dérivée, extremum, fonction majorée/minorée/bornée
- maximum, minimum, extremum
- dérivabilité d'une fonction en un point, dérivabilité sur un ensemble, fonction dérivée, tangente
- dérivée des fonctions usuelles : *formulaire*
- propriétés algébriques (dérivabilité et dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée) : *formulaire*
- dérivées d'ordres supérieurs
- fonctions usuelles (pour chacune d'entre elles, on en précise les propriétés algébriques et analytiques) :
  — fonction ln, fonctions log et $\log_2$, inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$ pour tout $x > -1$ ;
  — fonction exponentielle, inégalité $e^x \geqslant 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, croissances comparées ;
  — fonctions puissances $x \longmapsto x^a$ (cas $a \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) ;
  — fonctions cosinus, sinus et tangente hyperboliques ch, sh et th (la seule formule exigible est $\mathrm{ch}^2 - \mathrm{sh}^2 = 1$).

## Questions de cours

*Très peu de démonstrations ont été faites dans ce premier chapitre.*

- Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad e^x \geqslant 1 + x$$
- Calcul de la dérivée de $f : x \longmapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
- Calcul de la dérivée de la fonction th et en déduire le sens de variation de th sur $\mathbb{R}$. Préciser ses limites en $\pm\infty$.
- Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions, $f$ étant croissante sur $\mathbb{R}$ et $g$ étant décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- *Tout énoncé d'une définition ou d'une propriété peut être exigible.*
- *Les différentes propriétés d'une fonction usuelle choisie, ainsi que le graphe de celle-ci, peuvent faire l'objet de la question de cours.*

# Remarques aux colleurs

- On ne considèrera que des fonctions à valeurs réelles.
- Je n'ai pas insisté sur la *dérivabilité* d'une fonction composée (qui sera abordée ultérieurement). Pour une fonction du type $\sqrt{u}$, on donne directement le domaine de dérivabilité (une fois déterminé le domaine de définition) en ayant en tête que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
- Les fonctions circulaires et circulaires réciproques seront traitées ultérieurement.
- Les élèves doivent connaître parfaitement les propriétés relatives aux fonctions usuelles : domaines de définition, de dérivabilité, la dérivée, le graphique, les symétries éventuelles et les propriétés algébriques.
- Les élèves doivent savoir rédiger parfaitement une recherche de domaine de définition qui n'est pas évidente (avec résolution d'équation/inéquation par exemple).
- Les théorèmes des valeurs intermédiaires et de la bijection n'ont pas encore été traités.
- **Merci d'être très exigeants sur la rédaction.** *En particulier, toute variable doit être introduite.*

Voici par exemple comment aurait été rédigé en classe la détermination des domaines de définition $\mathscr{D}_f$ et de dérivabilité de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-4}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x \in \mathscr{D}_f &\iff x^2 - 4 \geqslant 0 \\ &\iff (x-2)(x+2) \geqslant 0 \\ &\iff x \in ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[ \qquad (\textit{faire un tableau de signe}) \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{\mathscr{D}_f = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[}$$

Comme la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, le domaine de dérivabilité de $f$ est $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$ et :

$$\forall x \in ]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[, \qquad f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$$