

PROBABILITÉS

Exercice 1 Soient A , B et C trois événements d'un univers Ω . Écrire en fonction de A , B et C les événements suivants :

1. E_1 : « Les événements A , B et C ont tous les trois lieu ».
2. E_2 : « Ils n'ont pas tous les trois lieu ».
3. E_3 : « Aucun des trois n'a lieu ».
4. E_4 : « Seul A a lieu ».
5. E_5 : « Seul l'un des trois a lieu ».
6. E_6 : « Au moins l'un des trois a lieu ».
7. E_7 : « Au moins deux des trois ont lieu ».
8. E_8 : « Au plus deux ont lieu ».

1 Probabilités et dénombrement

Exercice 2 On jette trois dés équilibrés. Calculer :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6 ;
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6 ;
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

Exercice 3 Dans un jeu de 32 cartes, il y a huit hauteurs (du 7 à l'as) et quatre couleurs (pique, cœur, carreau et trèfle). Une main est constituée de cinq cartes au poker.

1. Combien de mains peut-on former au total ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir :
 - (a) un carré (quatre cartes de même hauteur) ?
 - (b) exactement un brelan (trois cartes de même hauteur, les autres cartes sont de hauteurs différentes entre elles et de hauteurs différentes des trois premières) ?
 - (c) un full (un brelan et une paire) ?
 - (d) une double paire (deux paires de hauteurs différentes et pas de brelan) ?
 - (e) une quinte flush (cinq cartes de même couleur et de hauteurs consécutives) ?

2 Formules de probabilités

Exercice 4 On considère une classe de $n \in \mathbb{N}^*$ élèves. Pour chaque élève, on suppose que chaque jour de l'année a la même probabilité d'être le jour de son anniversaire et on ne prend pas en compte les années bissextiles.

1. Calculer la probabilité p_n que deux élèves de cette classe aient leur anniversaire le même jour.
2. À partir de combien d'élèves cette probabilité devient-elle supérieure à $\frac{1}{2}$?

Exercice 5 On considère une maladie dont 5% des personnes atteintes ne guérissent pas. On consulte trois malades. Quelle est la probabilité que les trois patients guérissent ? Qu'aucun des trois ne guérisse ? Qu'au moins un des trois ne guérisse pas ?

Exercice 6 Un quart d'une population a été vaccinée. Parmi les vaccinés, on compte $\frac{1}{12}$ de malades. Parmi les malades, un individu sur 5 est vacciné. Quelle est la probabilité pour un non vacciné de tomber malade ?

Exercice 7 On dispose de deux pièces. La pièce A donne face avec une probabilité de $\frac{1}{2}$, la pièce B donne face avec une probabilité de $\frac{2}{3}$. On choisit une des pièces au hasard et on la lance. Si on obtient face on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement « le joueur prend la pièce A au n^{e} lancer » et B_n l'événement « le joueur prend la pièce B au n^{e} lancer ». On note encore p_n la probabilité de l'événement A_n .

1. Pour tout entier naturel n non nul, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .
2. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la probabilité d'obtenir face au n^{e} lancer.

Exercice 8 On lance une seule fois une pièce équilibrée puis on effectue des tirages successifs dans une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire de la manière suivante :

- ★ on tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne ;
- ★ on rajoute ensuite une boule blanche si on a obtenu pile et une boule noire si on a obtenu face ;

★ on recommence.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

- Calculer la probabilité d'obtenir une boule blanche au k^{e} tirage.
- Sachant qu'on a obtenu une boule blanche au k^{e} tirage, calculer la probabilité d'avoir obtenu pile.
- Calculer la probabilité d'avoir obtenu k boules blanches lors des k premiers tirages.

Exercice 9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n urnes numérotées de 1 à n . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne k contient k boules blanches et $n - k$ boules noires. On choisit une urne au hasard puis une boule dans cette urne.

- Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?
- Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose qu'on a tiré une boule blanche. Quelle est la probabilité qu'elle ait été tirée dans l'urne numéro k ?

Exercice 10 (chaîne de Markov) Un rat de laboratoire se déplace entre trois cages A , B et C reliées entre elles par des tunnels. Initialement, le rat se trouve dans la cage A . Si, à un instant donné, le rat se trouve dans une cage, il se trouve l'instant suivant dans une des deux autres cages de manière équiprobable. Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n (respectivement B_n et C_n) l'événement « le rat est en A (respectivement B et C) à l'instant n » et on note a_n , b_n et c_n les probabilités associées.

- Montrer qu'il existe une matrice M carrée d'ordre 3 à déterminer telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer M^n en fonction de n .
- Déterminer les limites, quand n tend vers $+\infty$, des probabilités a_n , b_n et c_n .

Exercice 11 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dispose d'une urne contenant $n - 1$ boules numérotées de 1 à $n - 1$ et de n boîtes B_1, \dots, B_n . Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la boîte B_i contient i jetons numérotés de 1 à i .

On tire une boule de l'urne. Si la boule tirée porte le numéro i , on tire un jeton de la boîte B_i et un jeton de la boîte B_{i+1} . On dit qu'il y a succès si les deux jetons portent le même numéro.

- Quelle est la probabilité p_2 de succès lorsque $n = 2$?
- Quelle est la probabilité p_n de succès pour $n \geq 2$?
- (a) Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k+1} \leq \ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$$

et en déduire un équivalent au voisinage de l'infini de $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

- (b) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 12 On dispose de trois pièces : l'une est équilibrée, la deuxième donne face avec la probabilité 0,3 et la troisième donne face avec la probabilité $p \in]0, 1[$. On sait que lorsqu'on choisit une pièce au hasard et qu'on la lance, on obtient face avec la probabilité 0,5.

- Montrer que $p = \frac{7}{10}$.
- On choisit une pièce au hasard, on la lance deux fois. On obtient en tout une fois face et une fois pile.
 - On note E cet événement, c'est-à-dire : « on obtient en tout une fois pile et une fois face ». Montrer que $P(E) = \frac{67}{150}$.
 - Quelle est la probabilité d'avoir choisi la pièce équilibrée ?

Exercice 13 On lance indéfiniment une pièce non équilibrée dont la probabilité de tomber sur pile vaut $\frac{2}{3}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_n : « à l'issue du n^{e} lancer, on a obtenu pour la première fois deux pile consécutivement » (et on note a_n la probabilité de A_n) ainsi que les événements P_n (respectivement F_n) : « on obtient pile (respectivement face) au n^{e} lancer ». Par exemple, une façon de réaliser l'événement A_5 est $P_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap P_4 \cap P_5$.

- Calculer a_1 , a_2 et a_3 .
- Montrer que $(F_1, P_1 \cap P_2, P_1 \cap F_2)$ est un système complet d'événements et en déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{3} + \frac{2a_n}{9}$$

- En déduire une expression de a_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère N personnes numérotées de 1 à N qui se transmettent à la suite une information que dispose initialement la première personne. Chacun transforme une information en son contraire avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Pour tout $n \in \llbracket 1, N \rrbracket$, on note p_n la probabilité que la personne n reçoive la bonne information.

- Déterminer p_1 et p_2 .
- Pour tout $n \in \llbracket 2, N \rrbracket$, exprimer p_n en fonction de p_{n-1} .
- En déduire la valeur de p_N .

3 Indépendance

Exercice 15 Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. On lance n fois une pièce équilibrée. On considère les événements suivants :

- ★ A_n : « on obtient au plus une fois pile » ;
- ★ B_n : « on obtient au moins une fois pile et au moins une fois face ».

1. Montrer que $P(A_n) = (n + 1) \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
2. Montrer que $P(B_n) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}$.
3. Calculer de la même manière la probabilité de l'événement $A_n \cap B_n$.
4. Montrer que les événements A_n et B_n sont indépendants si et seulement si $\frac{n+1}{2^{n-1}} = 1$.
Conclure quant aux valeurs de n pour lesquelles A_n et B_n sont indépendants.

Exercice 16 Soit $p \in]0, 1[$. Un archer tire sur des cibles situées à 20 m et à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois (il alterne les cibles à 20 m et les cibles à 50 m). La probabilité d'atteindre la cible à 20 m est p , la probabilité d'atteindre la cible à 50 m est q . On suppose que les tirs sont indépendants. Il gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement. Par quelle cible a-t-il intérêt à commencer ?

Exercice 17 Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose que $A \cap B = \emptyset$. À quelle condition nécessaire et suffisante les événements A et B sont-ils indépendants ?